

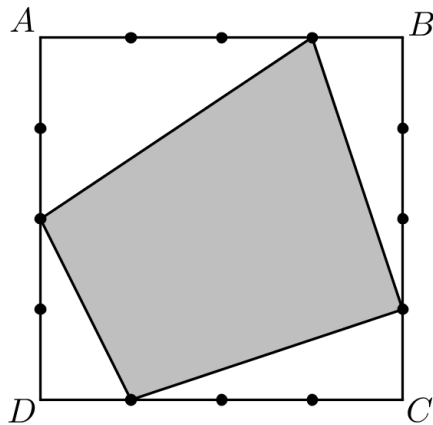
به نام او  
آزمون المپیاد هندسه مقدماتی

زمان آزمون: ۲۴۰ دقیقه

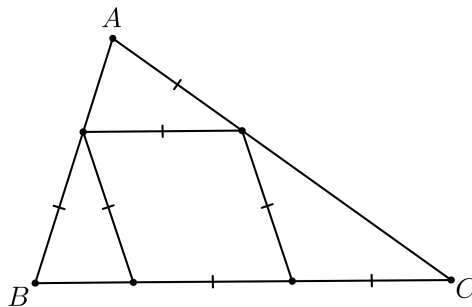
پنجشنبه ۱۶ شهریور ۱۳۹۶

مسائل آزمون باید تا زمانی که در وبسایت رسمی المپیاد هندسه قرار بگیرد محرمانه باقی بماند. لطفاً تا زمان مذکور از قرار دادن و مباحثه درباره مسائل در فضای مجازی خودداری کنید.

۱. هر یک از اضلاع مربع  $ABCD$  به ضلع ۴ را به کمک سه نقطه به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. در هر مرحله از هر یک از اضلاع یکی از سه نقطه را انتخاب می‌کنیم و نقاط را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم تا یک چهارضلعی ایجاد شود. مساحت چهارضلعی حاصل چه اعدادی می‌تواند باشد؟ فقط اعداد را بنویسید. اثبات لازم نیست.



۲. در شکل زیر زاویه‌های مثلث  $ABC$  را بیابید.



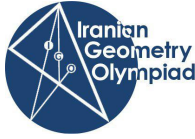
۳. در پنج ضلعی منتظم  $ABCDE$  از  $C$  بر ضلع  $CD$  عمود می‌کنیم تا ضلع  $AB$  را در  $F$  قطع کند. ثابت کنید  $AE + AF = BE$ .

۴. صد نقطه  $P_1, P_2, \dots, P_{100}$  در صفحه داریم که هیچ سه تایی از این نقاط هم خط نیستند. برای هر سه نقطه از این صد نقطه، اگر ترتیب صعودی اعداد این سه نقطه ساعتگرد باشند آن‌ها را یک مثلث ساعتگرد می‌نامیم. آیا ممکن است که تعداد مثلث‌های ساعتگرد دقیقاً ۲۰۱۷ باشد؟

۵. در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) از رأس  $A$  خط  $l$  را موازی ضلع  $BC$  رسم می‌کنیم. نقطه  $D$  را بر روی خط  $l$  به دلخواه در نظر می‌گیریم. پای عمودهای وارد از  $A$  بر  $BD$  و  $CD$  را به ترتیب  $E$  و  $F$  و پای عمودهای وارد از  $E$  و  $F$  بر  $l$  را به ترتیب  $P$  و  $Q$  می‌نامیم. ثابت کنید  $AP + AQ \leq AB$ .

بارم هر سوال ۸ نمره است

موفق باشید.



به نام او

## آزمون المپیاد هندسه متوسط

زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

پنجشنبه ۱۶ شهریور ۱۳۹۶

مسائل آزمون باید تا زمانی که در وبسایت رسمی المپیاد هندسه قرار بگیرد محرمانه باقی بماند. لطفاً تا زمان مذکور از قرار دادن و مباحثه درباره مسائل در فضای مجازی خودداری کنید.

۱. در مثلث حاده الزاویه  $ABC$  زاویه  $A$  برابر با  $60^\circ$  درجه است. پای عمود وارد از  $B$  بر  $AC$  را  $E$  و پای عمود وارد از  $C$  بر  $AB$  را  $F$  می‌نامیم. ثابت کنید  $CE - BF = \frac{3}{4}(AC - AB)$

۲. دو دایره  $\omega_1$  و  $\omega_2$  در نقاط  $A$  و  $B$  متقاطعند. خط دلخواهی از  $B$  می‌گذرانیم تا  $\omega_1$  را در  $C$  و  $\omega_2$  را در  $D$  قطع کند. نقاط  $E$  و  $F$  به ترتیب روی  $\omega_1$  و  $\omega_2$  به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که  $CE = CB$  و  $BD = DF$ . فرض کنید  $BF$  دایره  $\omega_1$  را در  $P$  و  $BE$  دایره  $\omega_2$  را در  $Q$  قطع کند. ثابت کنید  $A$  و  $P$  و  $Q$  هم‌خطند.

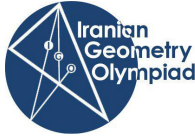
۳.  $n$  نقطه ( $n > 2$ ) در صفحه داده شده است که هیچ سه تایی از این نقاط هم‌خط نیستند. به ازای هر دو نقطه، خط واصل بین این نقاط را رسم می‌کنیم و نزدیکترین نقطه از بین بقیه نقاط به این خط را علامت می‌زنیم (فرض کنید در هر مورد این نقطه یکتا بوده است). حداکثر چند نقطه علامت می‌خورد؟

۴. در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) از رأس  $A$  خط  $l$  را موازی ضلع  $BC$  رسم می‌کنیم. نقطه  $D$  را بر روی خط  $l$  به دلخواه در نظر می‌گیریم. پای عمودهای وارد از  $A$  بر  $BD$  و  $CD$  را به ترتیب  $E$  و  $F$  و پای عمودهای وارد از  $E$  و  $F$  بر  $l$  را به ترتیب  $P$  و  $Q$  می‌نامیم. ثابت کنید  $AP + AQ \leq AB$ .

۵. در مثلث  $ABC$  نقاط  $X$  و  $Y$  را روی ضلع  $BC$  طوری در نظر می‌گیریم که  $XY = BC$ . فرض کنید  $AA'$  قطر دایره محیطی مثلث  $AXY$  باشد. فرض کنید  $AX$  و عمود وارد از  $B$  بر  $BC$  یکدیگر را در  $P$ ، و  $AY$  و عمود وارد از  $C$  بر  $BC$  یکدیگر را در  $Q$  قطع می‌کنند. ثابت کنید مماس در  $A'$  بر دایره محیطی مثلث  $AXY$  از مرکز دایره محیطی مثلث  $APQ$  عبور می‌کند.

بارم هر سوال ۸ نمره است

موفق باشید.



به نام او  
آزمون المپیاد هندسه پیشرفته

زمان آزمون: ۲۷۰ دقیقه

پنجشنبه ۱۶ شهریور ۱۳۹۶

مسائل آزمون باید تا زمانی که در وبسایت رسمی المپیاد هندسه قرار بگیرد محرمانه باقی بماند. لطفاً تا زمان مذکور از قرار دادن و مباحثه درباره مسائل در فضای مجازی خودداری کنید.

۱. در مثلث  $ABC$ ، محل برخورد نیمسازها را  $I$  و محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع  $BC$  را  $D$  می‌نامیم. فرض کنید  $DI$  ضلع  $AC$  را در  $X$  قطع کند. مماس وارد از  $X$  بر دایره محاطی ضلع  $AB$  را در  $Y$  قطع می‌کند. اگر محل برخورد  $YI$  و  $BC$  را  $Z$  بنامیم ثابت کنید  $AB = BZ$ .

۲. شش دایره دوبدو غیرمقاطع داریم که شعاع هریک از آنها حداقل واحد است. ثابت کنید هر دایره که هر شش دایره را قطع کند شعاعش حداقل واحد است.

۳. در مثلث  $ABC$  فرض کنید  $O$  مرکز دایره محیطی باشد. خط  $CO$  ارتفاع وارد از  $A$  بر ضلع  $BC$  را در  $K$  قطع می‌کند. وسط  $AK$  را  $P$  و وسط  $AC$  را  $M$  در نظر بگیرید. اگر  $PO$  ضلع  $BC$  را در  $Y$  و دایره محیطی مثلث  $BCM$  ضلع  $AB$  را در  $X$  قطع کند ثابت کنید چهارضلعی  $BXOY$  محاطی است.

۴. بر خط  $l$  سه دایره  $\omega_1$ ،  $\omega_2$  و  $\omega_3$  را به ترتیب در نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  به گونه‌ای مماس می‌کنیم که  $\omega_2$  بر دو دایره دیگر مماس خارج باشد (هر سه دایره در یک طرف  $l$  قرار دارند و  $B$  بین  $A$  و  $C$  قرار دارد). اگر مماس مشترک  $\omega_1$  و  $\omega_3$  دایره  $\omega_2$  را در  $X$  و  $Y$ ، و عمود وارد از  $B$  بر  $l$  دایره  $\omega_2$  را در  $Z$  قطع کند، ثابت کنید دایره به قطر  $AC$  بر  $ZX$  و  $ZY$  مماس است.

۵. فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  چهار نقطه بر روی یک صفحه باشند و  $S$  کره‌ای باشد که بر این صفحه مماس است. نقطه  $A'$  را به صورتی در نظر می‌گیریم که  $S$  به وجوه چهاروجهی  $A'BCD$  مماس شود. نقاط  $B'$  و  $C'$  و  $D'$  نیز به صورت مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید نقاط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  و  $D'$  بر روی صفحه‌ای قرار دارند که بر کره  $S$  مماس است.

بارم هر سوال ۸ نمره است

موفق باشید.