باسمه تعالی

# سوالات چلّه هندسه

## (روز اول تا هشتم)

## سطح مقدماتی

**روز اول:**

وقتی تعداد اضلاع یک چندضلعی از ۳ به $n$ افزایش می‌یابد، مجموع زاویه‌های خارجی حاصل از امتداد متوالی اضلاع:

الف) افزایش می‌یابد.

ب) کاهش می‌یابد.

ج) ثابت باقی می‌ماند.

د) نمی‌توان پیش‌بینی کرد.

ه) $(n-۳)$ برابر زاویه ۱۸۰ درجه می‌شود

**روز دوم:**

نقطه‌ای به دل‌خواه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع انتخاب، و از این نقطه عمودهایی بر هر ضلع وارد می‌کنیم. مجموع طول‌های این عمودها:

الف) کمترین است، وقتی مرکز ثقل مثلث باشد.

ب) بیشتر از ارتفاع مثلث است.

ج) مساوی ارتفاع مثلث است.

د) نصف مجموع ضلع‌های مثلث است.

ه) بیشترین است وقتی مرکز ثقل مثلث باشد.

**روز سوم:**

از هر رأس یک مستطیل ۲ خط را طوری رسم کنید که زاویه آن رأس به سه قسمت مساوی تقسیم شود. برای هر ضلع محل برخورد دو خط مجاور آن ضلع را در نظر بگیرید. این چهار نقطه چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

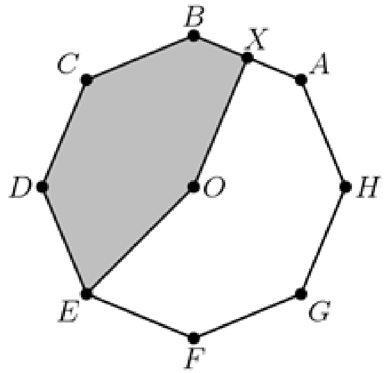
**روز چهارم:**

در مثلث $ABC$، $AB=AC$ و $\angle A=۴۰^\circ$. نقطهٔ $O$ داخل مثلث قرار دارد، به طوری که $\angle OCA=\angle OBC$. زاویهٔ $\angle BOC$ را بیابید.

**روز پنجم:**

اگر قاعدهٔ بزرگتر یک ذوزنقه متساوی‌الساقین با قطر آن و قاعدهٔ کوچکتر با ارتفاع آن برابر باشد، آن‌گاه نسبت قاعدهٔ کوچکتر به قاعده بزرگتر را بیابید.

**روز ششم:**



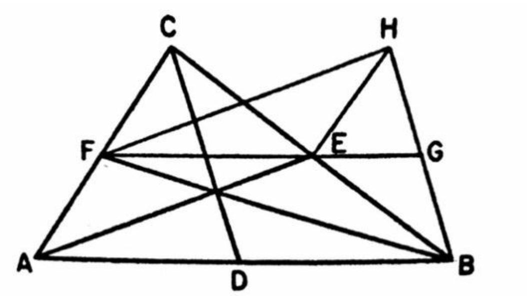

در هشت ضلعی منتظم روبه‌رو، نقطه $O$ مرکز شکل و نقطه $X$ وسط ضلع $AB$ می‌باشد.

مساحت قسمت رنگ شده چه کسری از مساحت کل شکل است؟

الف) $\frac{۱۱}{۳۲}$ ب) $\frac{۳}{۸}$ ج) $\frac{۱۳}{۳۲}$

د) $\frac{۷}{۱۶}$ ه) $\frac{۱۵}{۳۲}$

**روز هفتم:**




مثلث $ABC$ با میانه‌های $AE$، $BF$ و $CD$ داده شده است. $FH$ موازی و مساوی $AE$ است. $BH$ و $HE$ رسم می‌شوند. امتداد $FE$ پاره‌خط $BH$ را در $G$ قطع می‌کند. کدام یک از گزینه‌های زیر درست نیست؟

الف) $AEHF$ متوازی‌الاضلاع است. ب) $HE = HG$

ج) $BH = DC$ د) $FG = \frac{۳}{۴}AB$

ه) $FG$ میانهٔ مثلث $BFH$ است.

**روز هشتم:**

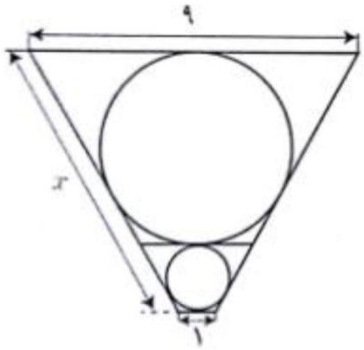
در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ $(AB = AC)$، نقطهٔ $D$ روی ضلع $BC$ و $E$ روی ضلع $AC$ به طوری انتخاب شده‌اند که $\angle BAD = ۳۰^\circ$ و $AD = AE$ است. زاویهٔ $\angle CDE$ را بیابید.

المپیاد هندسه ایران Iranian Geometry Olympiad

## سطح متوسط

**روز اول:**

اگر در شکل، شعاع دایرهٔ بزرگتر سه برابر شعاع دایرهٔ کوچکتر باشد، مقدار $x$ کدام است؟




الف) ۹

ب) ۸

ج) $۶\sqrt{۵}$

د) $۶\sqrt{۲}$

ه) ۷.۵

**روز دوم:**

یک مربع و یک مثلث متساوی‌الاضلاع که در هر کدام، مقدار عددی مساحت با مقدار عددی محیط برابر است مفروض‌اند. نسبت شعاع دایرهٔ محاطی مربع به شعاع دایرهٔ محاطی مثلث برابر است با:

الف) ۱ ب) $\frac{۴}{۳}$ ج) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ د) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$

**روز سوم:**

$AB$ قطر یک دایره به مرکز $O$ است. وتر $CD$ بر $AB$ عمود است. ثابت کنید نیمساز زاویه $\angle OCD$، کمان $AB$ را نصف می‌کند.

**روز چهارم:**

نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخل مثلثی، یک ضلع مثلث را به دو پاره‌خط به طول‌های ۶ و ۸ تقسیم می‌کند. اگر شعاع این دایره برابر ۴ باشد، طول کوچکترین ضلع مثلث چقدر است؟

**روز پنجم:**

در مثلث قائم الزاویه $ABC$ $(\angle C = ۹۰^\circ)$، نقاط $K$، $L$ و $M$ به ترتیب روی $AC$، $BC$ و $AB$ انتخاب شده‌اند به طوری‌که $AK = BL = a$، $KM = LM = b$ و $\angle KML = ۹۰^\circ$. ثابت کنید $a = b$.

**روز ششم:**

چند مثلث وجود دارند که رأس‌هایشان از رأس‌های سیزده ضلعی منتظم است و مرکز دایره محیطی سیزده ضلعی را در بر دارند؟

الف) ۷۲ ب) ۸۵ ج) ۹۱ د) ۱۰۰ ه) هیچ‌کدام

**روز هفتم:**

نقطه $C$ را روی پاره خط $AB$ چنان انتخاب می‌کنیم که $AC = ۳CB$ . دو دایره به قطرهای $AC$ و $CB$ رسم می‌کنیم. یکی از مماس‌های مشترک خارجی دو دایره امتداد $AB$ را در نقطهٔ $D$ قطع می‌کند. $BD$ برابر است با:

الف) قطر دایرهٔ کوچکتر ب) شعاع دایرهٔ کوچکتر ج) شعاع دایرهٔ بزرگتر

د) $\sqrt{۳}\,CB$ ه) تفاضل شعاع‌های دو دایره

**روز هشتم:**

نقاط $K$ و $L$ روی میانهٔ $AM$ از مثلث $ABC$ طوری انتخاب شده اند که $AK = KL = LM$. نقطهٔ $P$ طوری انتخاب شده‌است که مثلث‌های $KPL$ و $ABC$ متشابه باشند ($\frac{AB}{KP} = \frac{BC}{PL} = \frac{AC}{KL}$). اگر نقاط $P$ و $C$ در یک طرف $AM$ قرار داشته باشند، ثابت کنید نقطهٔ $P$ روی ضلع $AC$ قرار دارد.

# سطح پیشرفته

**روز اول:**

مثلث $ABC$ مفروض است به طوری که $\angle C = ۹۰^\circ$. نقطه $D$ را روی ضلع $AC$ و نقطه $K$ را روی پاره‌خط $BD$ طوری در نظر بگیرید که $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. ثابت کنید: $BK = ۲DC$.

**روز دوم:**

در چهارضلعی محاطی $ABCD$ داریم $AB = AD$. اگر $AC = ۶$ و $\frac{AB}{BD} = \frac{۳}{۵}$ باشد، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت $ABCD$ را بیابید.

**روز سوم:**

چهارضلعی $ABCD$ درون دایره‌ای به مرکز $O$ محاط شده است. می‌دانیم مماس بر دایرهٔ محیطی در نقاط $A$ و $C$ و قرینه خط $BD$ نسبت به نقطه $O$، همرس شده‌اند. ثابت کنید حاصل‌ضرب فاصله $O$ تا اضلاع مقابل $ABCD$ با یکدیگر برابر است.

**روز چهارم:**

با استفاده از خط‌کش و پرگار، خطی رسم کنید که دو ضلع $AB$ و $AC$ از مثلث مفروض $ABC$ را به ترتیب در نقاط $D$ و $E$ قطع کند، به طوری که $BD = DE = EC$.

**روز پنجم:**

در مثلث $ABC$ داریم $AB = ۱۳$، $BC = ۱۲$ و $CA = ۵$. فرض کنید نیمساز زاویه $A$ و $B$ یکدیگر را در $I$ و ضلع مقابل‌شان را به ترتیب در $D$ و $E$ قطع می‌کنند. خطی که از $I$ و وسط پاره‌خط $DE$ می‌گذرد، $AB$ را در $F$ قطع می‌کند. اندازه $AF$ چقدر است؟

الف) $\frac{۳}{۲}$　　ب) ۲　　ج) $\frac{۵}{۲}$

د) ۳　　ه) $\frac{۷}{۲}$

**روز ششم:**

مثلث‌های قائم‌الزاویه $ABC$ و $ABD$ با وتر مشترک $AB$ داده شده‌اند (نقاط $C$ و $D$ در یک طرف خط $AB$ قرار دارند). اگر $AC = BC$ و $DK$ نیمساز زاویه $ADB$ باشد ($K$ روی ضلع $AB$ است)، ثابت کنید مرکز دایره محیطی مثلث $ACK$ روی خط $AD$ قرار دارد.

**روز هفتم:**

فرض کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی است. $P$ محل برخورد $AD$ و $BC$ و $Q$ محل برخورد $AB$ و $CD$ است. نقطهٔ $E$ را طوری در نظر بگیرید که $ABCE$ متوازی‌الاضلاع شود. محل برخورد $CE$ و $PQ$ را $F$ بنامید. ثابت کنید نقاط $D$، $E$، $F$ و $Q$ روی یک دایره قرار دارند.

**روز هشتم:**

۹ دایرهٔ (دو به دو نابرابر) در صفحه کشیده شده‌اند به طوری که هر دو دایره، در ۲ نقطه با هم برخورد دارند. برای هر دو دایره، خطی را که از این دو نقطه می‌گذرد رسم می‌کنیم (در مجموع $۳۶ = \binom{۹}{۲}$ خط رسم می‌شود). فرض کنید این خطوط متمایزند. بیشترین تعداد نقاطی را بیابید که هر نقطه روی حداقل ۲ خط قرار گرفته باشد.

راهنمایی و پاسخ سوالات چلّه هندسه

(روز اول تا هشتم)

## سطح مقدماتی

**روز اول:** گزینه ج. مجموع زوایای داخلی یک $n$ ضلعی $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ و مجموع زوایای خارجی آن $۳۶۰^\circ$ است.

**روز دوم:** گزینه ج. با توجه به مساحت سه مثلثی که این نقطه با سه راس مثلث ایجاد می‌کند، مسئله را بررسی کنید.

**روز سوم:** لوزی. ثابت کنید نقطه‌ای که برای هر ضلع در نظر گرفتیم روی عمود منصف آن ضلع است.

**روز چهارم:** ۱۱۰ درجه. ثابت کنید $\angle OBA = \angle OCB$.

**روز پنجم:** نسبت دو قاعده $\frac{۳}{۵}$ است. یک قطر و ارتفاع ذوزنقه را رسم کرده و از رابطه فیثاغورث استفاده کنید.

**روز ششم:** گزینه د. مرکز را به رئوس متصل کنید تا ۶ ناحیه مساوی ایجاد شود.

**روز هفتم:** گزینه ب. تعداد زیادی متوازی‌الاضلاع در شکل وجود دارد. ثابت کنید نقاط $D$، $E$ و $H$ هم‌خط‌اند. در ضمن اضلاع مثلث $BFH$ مساوی و موازی با میانه‌های مثلث اصلی می‌باشند.

**روز هشتم:** ۱۵ درجه. رابطه زاویه خارجی را در مثلث‌ها بنویسید و کمی با زاویه‌ها کار کنید.

## سطح متوسط

**روز اول:** گزینه ب. طول مماس بین دو دایره را بیابید.

**روز دوم:** گزینه الف. رابطه‌ای برای مساحت برحسب شعاع دایره و محیط شکل بیابید.

**روز سوم:** راه‌حل ۱: قرینهٔ وتر $CD$ را نسبت به مرکز دایره در نظر بگیرید.

راه‌حل ۲: از مرکز دایره عمودی بر قطر $AB$ رسم کنید تا دایره را در $M$ قطع کند ($M$ وسط کمان است). از قضیه موازی و مورب و اینکه مثلث $OCM$ متساوی‌الساقین است استفاده کنید.

**روز چهارم:** طول کوچکترین ضلع ۱۳ است. مساحت مثلث را به سه روش می‌توان نوشت و از برابری آن‌ها مجهول سوال بدست می‌آید.

روش ۱: رابطه هرون برای مساحت مثلث

روش ۲: رابطه مساحت سینوسی مثلث

روش ۳: رابطه $S = pr$

**روز پنجم:** قرینه نقطه $M$ نسبت به $L$ را $N$ بنامید و ثابت کنید مثلث‌های $BLN$ و $AMK$ هم‌نهشت‌اند. از محاطی بودن $CKML$ نیز استفاده کنید.

**روز ششم:** گزینه ج.

**روز هفتم:** گزینه ب. دو تشابه در شکل بیابید.

**روز هشتم:** میانه $KN$ را در مثلث $KLP$ رسم کرده و از تشابه مثلث‌های $LKN$ و $CAM$ استفاده کنید.

## سطح پیشرفته

**روز اول:** راه‌حل ۱: قرینهٔ $D$ نسبت به ضلع $BC$ را $F$ بنامید. واضح است $BD = BF$. با کمی زاویه بازی ثابت کنید $AF = BF$.

راه‌حل ۲: از قضیه سینوس در مثلث‌های $ABK$ و $BCD$ استفاده کرده و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

**روز دوم:** حداکثر مساحت $۵\sqrt{۱۱}$ می‌باشد. ابتدا از رابطه بطلمیوس در چهارضلعی محاطی بدست آورید $BC + CD = ۱۰$ و سپس در امتداد $CB$ نقطه $E$ را انتخاب کنید به طوری که $BE = CD$ باشد.

**روز سوم:** قرینه رئوس $B$ و $D$ نسبت به مرکز دایره را $B'$ و $D'$ بنامید و از تشابه مثلث‌های $PD'C$ و $PCB'$ و همچنین تشابه مثلث‌های $PD'A$ و $PAB'$ استفاده نمایید.

**روز چهارم:** چهارضلعی را نسبت به راس $B$ تجانس دهید به طوری که $D$ روی $A$ بیفتد. سعی کنید این چهارضلعی را رسم کنید.

**روز پنجم:** گزینه د. ثابت کنید $IF \perp AB$ است و به عبارتی $F$ همان نقطه مماس دایره محاطی مثلث با ضلع $AB$ می‌باشد.

**روز ششم:** چهارضلعی $ABCD$ درون دایره‌ای به مرکز $O$ محاط شده است. قرینه $C$ نسبت به $O$ را $M$ بنامید. نقطه $K$ روی $MD$ قرار دارد. نقطه $P$ را روی $AD$ در نظر بگیرید به طوری که $AP = CP$ و ثابت کنید $P$ مرکز دایره محیطی مثلث $ACK$ است.

**روز هفتم:** ۱) مثلث‌های $BAP$ و $DCP$ متشابه‌اند.

۲) در مثلث‌های $BCQ$ و $DCP$ از قضیه سینوس استفاده کنید.

۳) برای اثبات محاطی بودن $DEQF$، رابطه قوت نقطه را روی قطرهای این چهارضلعی، بررسی کنید.

**روز هشتم:** حداکثر ۴۶۲ نقطه می‌شود. کافی است از تمام تقاطع‌های این خطوط، مرکز اصلی‌های هر سه دایره را کم کنیم.

$$\binom{۳۶}{۲} - ۲\binom{۹}{۳} = ۴۶۲$$