بسم الله الرحمن الرحیم

مجموعه سوالات هندسه

المپیاد ریاضی ایران

(۱۳۶۶-۱۳۷۴)

www.igo-official.ir
@igo_official

بسم الله الرحمن الرحیم

مرحله اول (بهمن ۱۳۶۶)

۱) در مثلث ABC میانه‌ی AM را رسم کنید و نقطه‌ی وسط آن را I بنامید. پاره‌خط BI را ادامه دهید تا ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع کند. ثابت کنید:

$$S_{ABC} = ۱۲\, S_{AID}$$

۲) مثلث ABC مفروض است.

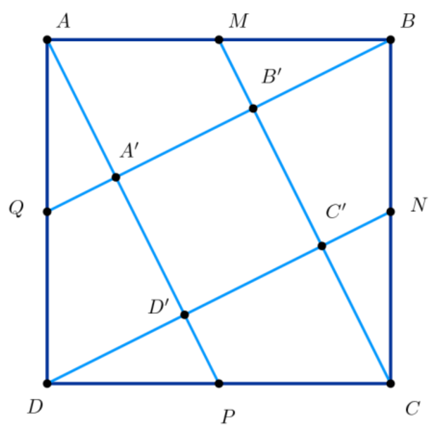
الف) ثابت کنید عده‌ی بی‌شماری مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به طوری که مثلث ABC در آن‌ها محاط باشد (یعنی هریک از رئوس A، B و C روی یکی از اضلاع مثلث ساخته شده قرار گیرد).

ب) از میان مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده مثلثی را تعیین کنید که محیط و مساحت آن ماکزیمم باشد.

مرحله دوم (اردیبهشت ۱۳۶۷)

۳) چهار خط متمایز $L_۱$، $L_۲$، $L_۳$ و $L_۴$ را در فضا در نظر بگیرید که هیچ سه تای آن‌ها در یک صفحه قرار نداشته باشند. فرض کنید محل تقاطع خطوط $L_۱$ و $L_۲$ نقطه‌ی A، محل تقاطع خطوط $L_۲$ و $L_۳$ نقطه‌ی B و محل تقاطع خطوط $L_۳$ و $L_۴$ نقطه‌ی C باشد. حداقل و حداکثر تعداد خطوطی را که در فضا هر چهار خط فوق را قطع می‌نمایند تعیین کرده و ادعای خود را ثابت کنید.

۴) در شکل زیر نقاط M، N، P و Q به ترتیب در وسط اضلاع مربع $ABCD$ قرار دارند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$ برابر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مربع $ABCD$ است.



مرحله اول (بهمن ۱۳۶۷)

۵) در مثلث غیر مشخص ABC که هر سه زاویه‌ی آن حاده هستند ارتفاعات AD، BE و CF را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث را به ترتیب در P، Q و R قطع کنند. اگر h طول بزرگترین ارتفاع و s طول کوچکترین پاره‌خط از بین پاره‌خط‌های AP، BQ و CR باشد، ثابت کنید:

$$\frac{h}{s} > \frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۶) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که $AC > BD$، از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^{۲}$$

مرحله دوم (فروردین ۱۳۶۸)

۷) اگر در چهارضلعی محیطی $ABCD$، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایره‌ی محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقاط I، J و O بر یک استقامت‌اند.

۸) اگر در چهاروجهی $ABCD$ ارتفاع‌های وارد از هر راس بر وجه مقابل را با h_a، h_b، h_c و h_d نمایش دهیم، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_d}$$

مرحله اول (آذر ۱۳۶۸)

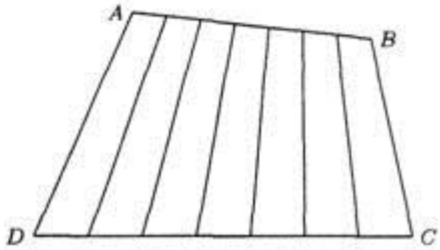
۹) نشان دهید اگر a، b و c طول‌های اضلاع یک مثلث باشند، داریم:

$$۳\left(ab+bc+ca\right) \le \left(a+b+c\right)^{۲} < ۴\left(ab+bc+ca\right)$$

۱۰) اگر $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ فواصل یک نقطه در درون مثلث قائم‌الزاویه از سه ضلع آن و a طول وتر مثلث باشد، نشان دهید:

$$\sqrt{d_۱} + \sqrt{d_۲} + \sqrt{d_۳} < \sqrt{۲a}$$

۱۱) در چهارضلعی $ABCD$ (شکل زیر) ضلع AB را به هفت قسمت مساوی و ضلع CD را نیز به هفت قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا هفت چهارضلعی کوچک به دست آید.



ثابت کنید دست‌کم یکی از چهارضلعی‌های کوچک مساحتی برابر $\frac{۱}{۷}$ مساحت چهارضلعی $ABCD$ دارد.

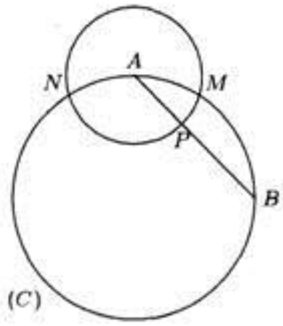
مرحله دوم (بهمن ۱۳۶۸)

۱۲) کره‌ی S به مرکز O و شعاع R و نقطه‌ی ثابت P روی آن داده شده است. سه نقطه‌ی A ، B و C روی کره به گونه‌ای حرکت می‌کنند که کنج $P\text{-}ABC$ همواره کنج سه قائمه است. ثابت کنید صفحه‌ی مثلث ABC از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۱۳) خط D را نسبت به مثلث ABC «*وفادار*» گوییم هرگاه در صفحه‌ی آن مثلث بوده و قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع مثلث مزبور، همرس باشند. ثابت کنید برای هر دو مثلث واقع در یک صفحه که کلیه‌ی زاویه‌های آن‌ها حاده باشند، یا تنها یک خط «*وفادار*» نسبت به آن دو وجود دارد و یا به تعداد نامتناهی.

مرحله اول (آذر ۱۳۶۹)

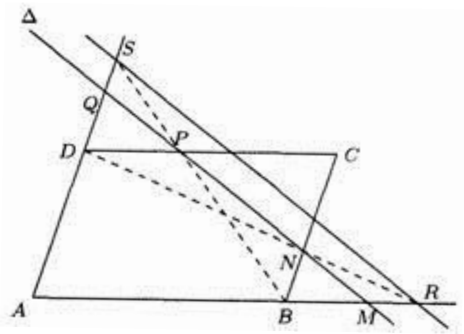
۱۴) وتر AB از دایره‌ی (C) را در نظر می‌گیریم. دایره‌ی دیگری به مرکز A و به شعاع کوچکتر از طول AB رسم می‌کنیم تا دایره‌ی (C) را در نقاط M و N و وتر AB را در نقطه‌ی P قطع کند، ثابت کنید عمودمنصف BP از وسط کمان MB می‌گذرد.



۱۵) ثابت کنید در هر مثلث، خطوطی که اوساط اضلاع را به اوساط ارتفاع‌های متناظر وصل می‌کنند، متقارب‌اند [همرس‌اند].
آیا می‌توان به جای ارتفاع‌ها، هر سه خط متقارب [همرس] را در نظر گرفت؟ چگونه؟ ثابت کنید.

مرحله دوم (بهمن ۱۳۶۹)

۱۶) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است، خط Δ خطوط AB، BC، CD و DA را به ترتیب در نقاط M، N، P و Q قطع می‌کند. اگر محل برخورد AB و DN را R و محل برخورد AD و BP را S بنامیم، ثابت کنید: $\Delta \parallel RS$.



۱۷) مجموعه‌ی مثلث‌های ABC را در نظر می‌گیریم که در دایره‌ای به شعاع R محاط‌اند، در چه صورت $AB^۲ + AC^۲ + BC^۲$ ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را حساب کنید.

همچنین مجموعه‌ی چهاروجهی‌های $ABCD$ را که در کره‌ای به شعاع R محاط باشند در نظر می‌گیریم؛ در چه صورت مجموع مربعات ۶ یال آن‌ها ماکزیمم است؟ این ماکزیمم را نیز محاسبه کنید و ثابت کنید در این حالت وجوه با هم برابرند.

مرحله اول (آذر ۱۳۷۰)

۱۸) ثابت کنید بی‌نهایت مثلث با مختصات صحیح وجود دارد که مساحت آن‌ها کمترین مقدار ممکن [مثبت] باشد.

۱۹) خط (L) دو خط (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. از نقطه‌ی P واقع بر (L) خطی رسم کنید که (m) و (n) را به ترتیب در نقاط A' و B' قطع کند، به طوری‌که $\frac{AA'}{BB'} = K$.

مرحله دوم (بهمن ۱۳۷۰)

۲۰) چهاروجهی $ABCD$ داده شده است.

الف) اگر صفحه‌ای مانند (P) این چهاروجهی را قطع کند، شرط لازم و کافی برای اینکه مقطع حاصل متوازی‌الاضلاع گردد چیست؟ نشان دهید در این صورت مسأله دارای سه دسته جواب است.

ب) اکنون یکی از این سه دسته جواب را در نظر می‌گیریم. وضع صفحه‌ی (P) را چگونه باید انتخاب کرد تا مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل ماکزیمم گردد.

ج) صفحه‌ی (P) را به گونه‌ای اختیار کنید که مقطع حاصل لوزی گردد و در این صورت اندازه‌ی ضلع لوزی را بر حسب اندازه‌های یال‌های چهاروجهی به دست آورید.

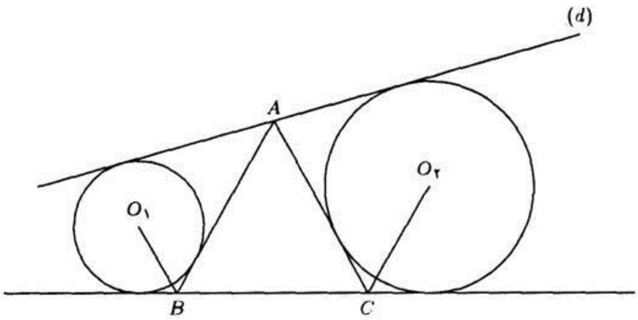
۲۱) مثلث ABC در دایره‌ی (C) محاط است. نیمسازهای درونی زوایای مثلث مزبور دایره‌ی (C) را مجدداً در A' ، B' و C' قطع می‌کنند. اگر I نقطه‌ی برخورد نیمسازها باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geq ۳$$

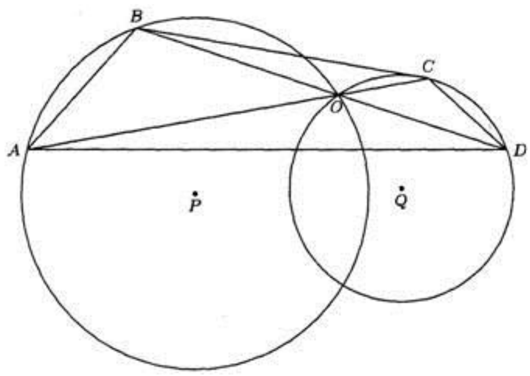
$$IA'+IB'+IC'\geq IA+IB+IC$$

مرحله اول (آذر ۱۳۷۱)

۲۲) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. از نقطه‌ی A در بیرون مثلث، خطی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره‌ای باشند که مطابق شکل به ترتیب بر AB ، BC و (d) و همچنین بر AC ، BC و (d) مماس‌اند، آن‌گاه ثابت کنید که O_1B+O_2C مقداری است ثابت.



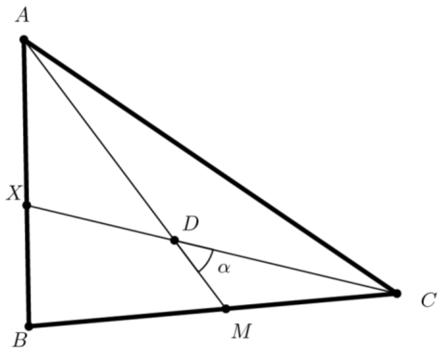
۲۳) در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، نقطه‌ی O محل برخورد قطرهاست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند، آن‌گاه ثابت کنید که:



$$PQ\geq\frac{AB+CD}{۴}$$

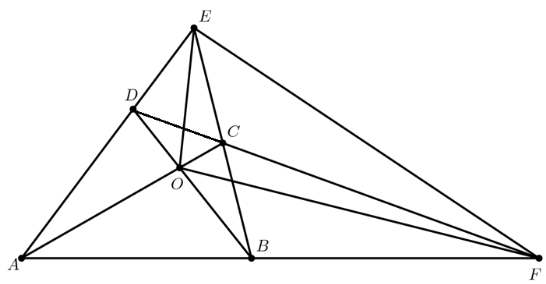
مرحله دوم (بهمن ۱۳۷۱)

۲۴) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) نیمسازهای درونی زاویه‌های B و C یکدیگر را در نقطه‌ی I و ضلع‌های روبرو را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید مساحت چهارضلعی $BCDE$ دو برابر مساحت مثلث BIC است.



۲۵) در مثلث ABC داریم $\hat{A} \leq ۹۰^\circ$ و $\angle B = ۲\angle C$. اگر نیمساز درونی زاویه‌ی C میانه‌ی AM را در نقطه‌ی D قطع کند (M وسط BC است)، ثابت کنید که $\angle MDC \leq ۴۵^\circ$. با چه شرطی $\angle MDC = ۴۵^\circ$؟

مرحله سوم (اردیبهشت ۱۳۷۲)



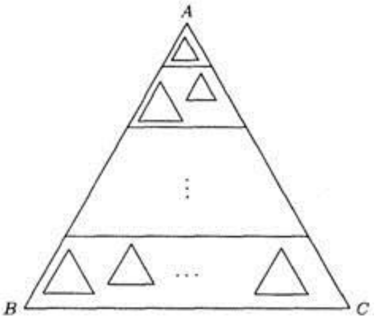
۲۶) در شکل مساحت‌های سه مثلث AOD، DOC و AOB در دست است.
مساحت مثلث OEF را فقط بر حسب مساحت‌های سه مثلث حساب کنید.

۲۷) در چهارضلعی محدب $ABCD$ دو قطر AC و BD برابرند. روی اضلاع این چهارضلعی و در خارج آن چهار مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم. ثابت کنید خطوط واصل بین مراکز مثلث‌های ساخته شده روی اضلاع مقابل، بر هم عمودند.

مرحله اول (آذر ۱۳۷۲)

(دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان)

۲۸) در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نیمساز درونی زاویه‌ی A، ضلع BC را در D قطع می‌کند و E قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی M است. ثابت کنید پاره‌خط‌های AD، DE و $\left|AB - AC\right|$ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.



۲۹) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم، ضلع AB را به n قسمت (نه لزوماً مساوی) تقسیم می‌کنیم. از نقاط تقسیم خطوطی موازی BC رسم می‌کنیم، آن‌گاه در هر یک از قسمت‌های به دست آمده در قسمت اول یک مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه)، در قسمت دوم دو مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه و متمایز [بدون اشتراک])، ... و در قسمت n ام، n مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه و متمایز [بدون اشتراک]) طوری قرار می‌دهیم که قاعده‌ی آن‌ها موازی BC باشد. اگر ضلع مثلث ABC را a نامیده و اضلاع سایر مثلث‌ها را به ترتیب a_1 ، a_2 ، ... و a_m بنامیم (واضح است که $m=\frac{n(n+1)}{2}$)، آن‌گاه ثابت کنید که:

الف) $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \le a^2$ **ب)** $\sum_{i=1}^{m} a_i \le \frac{m}{2}a \quad (m \ne 1)$

مرحله اول (آذر ۱۳۷۲)

۳۰) نقطه‌ی P را درون مثلث ABC اختیار می‌کنیم، خطوط راست BP و CP اضلاع روبرو را به ترتیب در B_1 و C_1 قطع می‌کنند. اگر بدانیم که هم مساحت‌ها و هم محیط‌های دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند، آن‌گاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویه‌ی A قرار دارد.

۳۱) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن را در نظر می‌گیریم. از نقاط A، B و C خطوط دلخواهی رسم می‌کنیم تا اضلاع و کمان‌های روبرو را به ترتیب در M و M'، N و N'، P و P' قطع کنند. ثابت کنید اگر حاصل عبارت

$$T=\frac{AM'}{MM'}+\frac{BN'}{NN'}+\frac{CP'}{PP'}$$

مینیمم شود، آن‌گاه سه خط مزبور همرس‌اند. سپس نشان دهید $T \ge 12$.

مرحله دوم (بهمن ۱۳۷۲)

۳۲) مثلث ABC به اضلاع a ، b و c و مساحت S داده شده است. اثبات یا رد کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌ای مانند P درون آن وجود داشته باشد به گونه‌ای که فاصله‌ی آن از سه رأس مثلث مزبور به ترتیب x ، y و z باشد، آن است که مثلثی به اضلاع a ، y و z و مساحت S_1 ، مثلثی به اضلاع b ، x و z و مساحت S_2 و مثلثی به اضلاع c ، x و y و مساحت S_3 وجود داشته باشد که $S_1+S_2+S_3=S$.

۳۳) اگر D_1 و D_2 دو خط متنافر باشند، آن‌گاه ثابت کنید بی نهایت خط راست وجود دارد که همه‌ی نقاط روی آن‌ها از این دو خط به یک فاصله‌اند.

مرحله سوم (اردیبهشت ۱۳۷۳)

۳۴) دایره‌های هم‌مرکز O_1 و O_2 به شعاع‌های R_1 و R_2 مفروض‌اند ($R_2 > R_1$). چهارضلعی‌های $A_1B_1C_1D_1$ و $A_2B_2C_2D_2$ به ترتیب در O_1 و O_2 محاط شده‌اند به طوری که نقاط A_2 ، B_2 ، C_2 و D_2 به ترتیب روی نیم‌خط‌های C_1D_1، D_1A_1، A_1B_1 و B_1C_1 قرار دارند. نشان دهید که:

$$\frac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} \geq \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

۳۵) یک منحنی به طول ۱ در دست است. نشان دهید مستطیلی به مساحت $\frac{1}{4}$ وجود دارد که این منحنی را در خود جای می‌دهد.

۳۶) مثلث ABC و نقطه M را درون آن مفروض می‌گیریم. دایره‌هایی به قطرهای AM، BM و CM و همچنین دایره‌ی Γ را مماس بر این سه دایره در نظر می‌گیریم به طوری که هر سه دایره داخل Γ باشند. اگر R شعاع دایره‌ی Γ و r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC باشد، بزرگترین عدد k را پیدا کنید به طوری که: $R \geq kr$.

مرحله سوم (خرداد ۱۳۷۳)

۳۷) C_1 و C_2 دو دایره هم‌مرکز در صفحه و A و B دو نقطه مفروض روی C_1 هستند. نقطه M روی C_2 را چنان بیابید که $|MA - MB|$ ماکزیمم باشد و مقدار ماکزیمم را حساب کنید.

۳۸) دایره‌های C_1 و C_2 در دو نقطه A و B متقاطع‌اند. از B خطی می‌گذرانیم تا C_1 و C_2 را به ترتیب در M_1 و M_2 قطع کند. مکان هندسی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث AM_1M_2 را پیدا کنید.

مرحله اول (آبان ۱۳۷۳)

(دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان)

۳۹) در یک چهارضلعی محدب $ABCD$ محل تقاطع دو قطر را O می‌نامیم، اگر محیط مثلث‌های ABO، BCO، CDO و ADO با هم برابر باشند، ثابت کنید این چهارضلعی لوزی است.

۴۰) ۱۳۷۳ شکل درون یک مربع به مساحت واحد قرار دارند طوری که مجموع مساحت‌های آن‌ها از ۱۳۷۲ بیشتر است. ثابت کنید این اشکال حداقل در یک نقطه مشترک هستند.

۴۱) اگر I مرکز دایره‌ی محیطی مثلث غیرمتساوی‌الساقین ABC باشد و A_1، B_1 و C_1 نقاط تماس این دایره با اضلاع BC، AC و AB باشند، ثابت کنید مراکز دوایر محیطی مثلث‌های AIA_1، BIB_1 و CIC_1 روی یک خط هستند.

مرحله اول (آبان ۱۳۷۳)

۴۲) روی مربع $ABCD$ نقاط K و N روی AB و AD به ترتیب داده شده‌اند به طوری‌که

$$AK \cdot AN = ۲BK \cdot DN$$

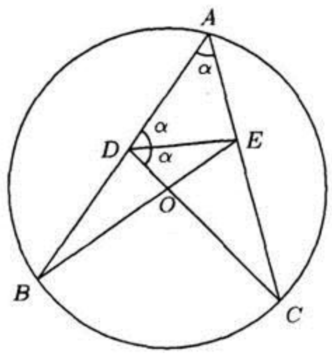
اضلاع CK و CN قطر BD را در نقاط L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید نقاط K، L، M، N و A روی یک دایره هستند.

۴۳) یک نقطه‌ی p درون یک ضلعی $۲n$ محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطه‌ی p وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا یکی از اضلاع را قطع کند. ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ یک از این خطوط آن را قطع نمی‌کند (قطع کردن امتداد اضلاع مورد نظر نیست).

۴۴) صفحه‌ی P و نقطه‌ی M روی آن و دو نقطه‌ی A و B در یک طرف آن مفروض‌اند. از نقطه‌ی M خطی در صفحه‌ی P رسم کنید که از A و B به یک فاصله باشد.

مرحله دوم (بهمن ۱۳۷۳)

۴۵) در شکل، نقطه‌ی O مرکز دایره است. زاویه‌ی α چند درجه است؟



۴۶) فرض کنید در مثلث ABC نقاط M، N و P به ترتیب نقاط تماس دایره‌ی محاطی داخلی ABC با اضلاع AB، AC و BC باشند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث MNP ، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC و مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

مرحله سوم (اسفند ۱۳۷۳)

۴۷) فرض کنید a، b و c اندازه‌های اضلاع مثلث ABC باشند و x، y و z را اعداد حقیقی نامنفی اختیار می‌کنیم به گونه‌ای که $x + y + z = ۱$. ثابت کنید:

$$\sum xbc - P\sum yza \geq ۳Rr$$

۴۸) در مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع با کمترین مساحت محاط کنید.

مرحله سوم (فروردین ۱۳۷۴)

۴۹) مثلث دلخواه ABC را که غیر قائم‌الزاویه است در نظر می‌گیریم. فرض کنید H محل تلاقی ارتفاعات آن باشد. خط l که از H می‌گذرد AB و AC را به ترتیب در $D \neq B$ و $E \neq C$ قطع می‌کند. P را نقطه‌ای (در داخل مثلث) می‌گیریم که $AP \perp l$، ثابت کنید:

$$\frac{S(\Delta PBD)}{S(\Delta PCE)} = \frac{DH}{EH}$$

۵۰) در مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC داریم $\angle BAC = ۶۰^\circ$. اگر H، I و O به ترتیب محل تلاقی ارتفاعات، مرکز دایره محاطی و مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشند و $BH = OI$، زوایای مثلث ABC را پیدا کنید.

مرحله سوم (اردیبهشت ۱۳۷۴)

۵۱) نشان دهید هرگاه دایره‌ی محاطی مثلث در یک مربع محاط شود، حداقل نصف محیط مربع در درون مثلث قرار می‌گیرد.

۵۲) دایره C و خط L که بر آن مماس است مفروض‌اند. نقطه M روی خط L قرار دارد. مکان هندسی نقاطی مانند P را بیابید به طوری که دو نقطه A و B روی L و متقارن نسبت به M وجود داشته باشند که C دایره محاطی مثلث PAB باشد.

مرحله اول (آبان ۱۳۷۴)
(دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان)

۵۳) از ۱۲۰ کره‌ی مشابه یک هرم مثلث القاعده‌ی منتظم ساخته‌ایم. در قاعده‌ی هرم چند کره قرار می‌گیرد؟

۵۴) دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ مفروض‌اند به طوری که نقطه‌ی A مرکز دایره‌ی $C_۱$، روی دایره‌ی $C_۲$ قرار می‌گیرد. BC را وتر مشترک دو دایره می‌گیریم؛ وتر AD، BC را در E قطع می‌کند. از نقطه‌ی D، مماس‌های DF و DG را بر $C_۱$ رسم می‌کنیم. ثابت کنید E، F و G روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

مرحله اول (آبان ۱۳۷۴)

۵۵) فرض کنید Γ دایره محیطی مثلث مفروض ABC باشد. P را نقطه‌ای دلخواه روی کمان ACB متمایز از نقاط A، B و C فرض می‌کنیم. X و Y را به ترتیب دو نقطه روی AP و BP یا امتداد آنها در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $AX = AC$ و $BY = BC$. ثابت کنید با تغییر دادن P، XY از نقطه ثابتی می‌گذرد.

مرحله دوم (آذر ۱۳۷۴)

۵۶) مثلث ABC که زوایای آن حاده هستند و خط L واقع در صفحه‌ی مثلث مفروض‌اند. قرینه‌های خط L را نسبت به هر یک از اضلاع مثلث ABC به دست می‌آوریم تا یکدیگر را در A'، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار می‌گیرد.

۵۷) در چهاروجهی $ABCD$ فرض کنید A'، B'، C' و D' به ترتیب مراکز دوایر محیطی مثلث‌های BCD، CDA، DAB و ABC باشند. اگر صفحه‌ای را که از نقطه‌ی X بر خط YZ عمود می‌شود، به $S\left(X,YZ\right)$ نمایش دهیم، ثابت کنید چنانچه A'، B'، C' و D' در یک صفحه نباشند، چهار صفحه‌ی $S\left(A,C'D'\right)$، $S\left(B,A'D'\right)$، $S\left(C,A'B'\right)$ و $S\left(D,B'C'\right)$ از یک نقطه می‌گذرند.

ستاره‌ای از آسمان نهج‌البلاغه:

«اگر از عمر گذشته خود که تلف کرده‌ای عبرت بگیری، باقیمانده عمرت را پاس داری.»

«توفیق تنها از جانب اوست»