



اولین المپیاد هندسه ایران

شهریور ۱۳۹۳

فهرست مطالب

| | |
|----|----------------------|
| ۱ | سوالات سطح مقدماتی |
| ۳ | سوالات سطح پیشرفته |
| ۶ | پاسخ‌های سطح مقدماتی |
| ۱۶ | پاسخ‌های سطح پیشرفته |

سوال ۱. مثلث قائم‌الزاویه ABC با رأس قائمه A مفروض است و داریم $\angle C = 30^\circ$. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N ، و دایره محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی فرد

سوال ۲. دایره محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC ، CA و AB در نقاط D ، E و F مماس است. پای عمود وارد از F و E بر ضلع BC را به ترتیب K و L می‌نامیم. این عمودها دایره محاطی مثلث را برای بار دوم به ترتیب در M و N قطع می‌کنند. ثابت کنید

$$\frac{\text{مساحت مثلث } BMD}{\text{مساحت مثلث } CND} = \frac{DK}{DL}$$

مهدی اعتصامی فرد

سوال ۳. مهدی و مرتضی هر کدام یک ۹۳ ضلعی محاطی رسم کرده‌اند. می‌دانیم اضلاع نظیر آن‌ها دو به دو با یکدیگر موازی است. ثابت کنید نسبت طول اضلاع نظیر این دو ۹۳ ضلعی مقدار ثابتی است.

مرتضی تقفیان

سوال ۴. در مثلث ABC داریم $\angle C = 90^\circ + \angle A$. نقطه D روی امتداد ضلع BC است به گونه‌ای که $AC = AD$. نقطه E را در طرف مقابل خط BC (که A در آن قرار ندارد) طوری انتخاب می‌کنیم که $\angle EBC = \angle A$ و $\angle EDC = \frac{\angle A}{2}$. ثابت کنید $\angle CED = \angle B$.

مرتضی تقفیان

سوال ۵. نقاط X و Y روی کمان BC از دایره محیطی مثلث ABC قرار دارند (کمانی که شامل رأس A نیست) به طوری که $\angle BAX = \angle CAY$. اگر P وسط وتر AX باشد، ثابت کنید $BP + CP > AP$.

ماهان تجربه‌کار

بارم هر سوال ۸ نمره است.

سوال ۱. مثلث قائم‌الزاویه ABC با رأس قائمه A مفروض است و داریم $\angle C = 30^\circ$. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N ، و دایره محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی فرد

سوال ۲. در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\angle B = \angle D = 60^\circ$. از نقطه M ، وسط ضلع AD ، خطی به موازات CD رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه P قطع کند. نقطه X روی خط CD قرار دارد به گونه‌ای که $BX = MX$. ثابت کنید $AB = BP$ اگر و تنها اگر $\angle MXB = 60^\circ$.

داود وکیلی

سوال ۳. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. دایره به قطر BC اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. محل برخورد میانه نظیر رأس A و EF را P می‌نامیم. X نقطه‌ای دل‌خواه روی کمان EF و Y تقاطع دوم XP با دایره به قطر BC است. ثابت کنید $\angle YAX = \angle MYX$.

علی ذوعلم

سوال ۴. مماس در A بر دایرهٔ محیطی مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC ($AC > AB$) امتداد ضلع BC را در P قطع می‌کند. O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد. X روی OP طوری قرار دارد که $\angle AXP = 90^\circ$. E و F به ترتیب روی AB و AC و در یک طرف خط OT طوری قرار دارند که $\angle EXP = \angle ACX$ و $\angle FXO = \angle ABX$. اگر L و K محل برخورد EF با دایرهٔ محیطی ABC باشند (F روی پاره‌خط EL است) ثابت کنید PO بر دایرهٔ محیطی مثلث KLX مماس است.

مهدی/اعتصامی‌فرد

سوال ۵. دو نقطهٔ P و Q روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارند و از وسط این ضلع به یک فاصله‌اند. عمودهای وارد از P و Q بر BC خطوط AC و AB را به ترتیب در E و F قطع می‌کنند. M محل برخورد PF و EQ می‌باشد. اگر H_1 و H_2 به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های BFP و CEQ باشند ثابت کنید $AM \perp H_1H_2$.

مهدی/اعتصامی‌فرد

بارم هر سوال ۸ نمره است.

پاسخ‌های سطح مقدماتی

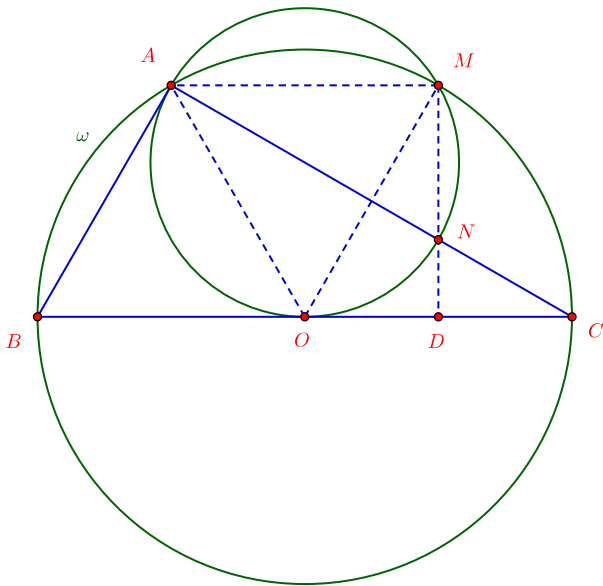
سوال ۱. مثلث قائم‌الزاویه ABC با رأس قائمه A مفروض است و داریم $\angle C = 30^\circ$. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N ، و دایره محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی فرد

اثبات. فرض کنید خط MN ضلع BC را در D قطع کند. برای اثبات عمود بودن MN بر BC کافی است ثابت کنیم $\angle CND = 60^\circ$ ، یا معادلاً $\angle ANM = 60^\circ$. دایره ω در O بر BC مماس است، پس زاویه ظللی $\angle AOB$ با زاویه محاطی $\angle AMO$ برابر است. از طرفی زاویه $\angle AOB$ زاویه مرکزی و در نتیجه دو برابر زاویه محاطی $\angle ACB$ است. پس

$$\angle AMO = \angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$$

OA و OM دو شعاع از دایره محیطی ABC اند، پس $OA = OM$. بنابر دو نتیجه اخیر در مثلث متساوی‌الساقین AOM زاویه مجاور قاعده 60° درجه است. پس AOM متساوی‌الاضلاع است و $\angle AOM = 60^\circ$. زاویه‌های محاطی $\angle ANM$ و $\angle AOM$ رو به یک کمان از دایره ω قرار دارند، پس $\angle ANM = \angle AOM = 60^\circ$. \square



شکل راه حل

سوال ۲. دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر اضلاع BC ، CA و AB در نقاط D ، E و F مماس است. پای عمود وارد از F و E بر ضلع BC را به ترتیب K و L می‌نامیم. این عمودها دایرهٔ محاطی مثلث را برای بار دوم به ترتیب در M و N قطع می‌کنند. ثابت کنید

$$\frac{\text{مساحت مثلث } BMD}{\text{مساحت مثلث } CND} = \frac{DK}{DL}$$

مهدی اعتصامی فرد

اثبات. می‌دانیم

$$\left. \begin{array}{l} \angle BFH = 90^\circ - \angle B \\ \angle BFD = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DFM = \frac{\angle B}{2}$$

اما $\angle MDK = \angle DFM$ بنابراین

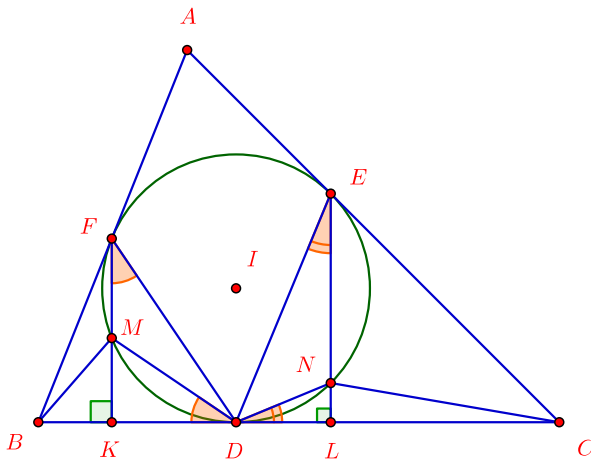
$$\angle MDK = \frac{\angle B}{2}$$

در نتیجه دو مثلث BID و MDK (با دو زاویهٔ برابر) متشابه‌اند و $\frac{MK}{DK} = \frac{r}{BD}$.
به طریق مشابه ثابت می‌شود $\frac{NL}{DL} = \frac{r}{CD}$ پس

$$r = \frac{MK \cdot BD}{DK} = \frac{NL \cdot CD}{DL}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت مثلث } BMD}{\text{مساحت مثلث } CND} = \frac{MK \cdot BD}{NL \cdot CD} = \frac{DK}{DL}$$

□



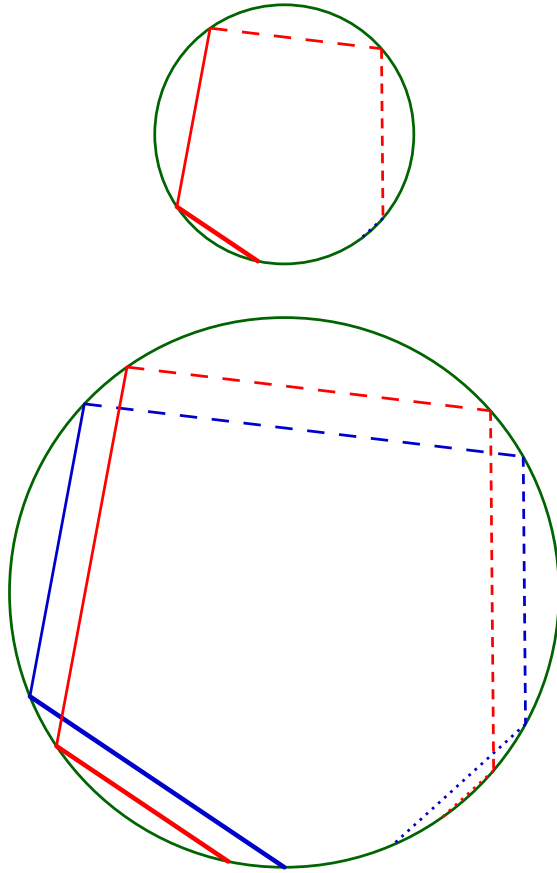
شکل راه حل

سوال ۳. مهدی و مرتضی هر کدام یک ۹۳ ضلعی محاطی رسم کرده‌اند. می‌دانیم اضلاع نظیر آن‌ها دو به دو با یکدیگر موازی است. ثابت کنید نسبت طول اضلاع نظیر این دو ۹۳ ضلعی مقدار ثابتی است.

مرتضی تقفیان

اثبات. یک ۹۳ ضلعی مشابه با ۹۳ ضلعی دوم در دایره‌ی محیطی ۹۳ ضلعی اول رسم می‌کنیم. (با این کار اضلاع چندضلعی دوم در عدد ثابتی مثل c ضرب می‌شود.) حال دو چندضلعی با شرایط مسئله داریم که در یک دایره محاط شده‌اند. راس‌های چندضلعی اول را با شروع از یک راس دل‌خواه به ترتیب A_1, A_2, \dots, A_{93} و راس‌های متناظر در چندضلعی دوم را B_1, B_2, \dots, B_{93} می‌نامیم.

اضلاع A_1A_2 و B_1B_2 موازیند، پس کمان‌های $\widehat{A_1B_1}$ و $\widehat{A_2B_2}$ برابرند اما در جهت عکس یکدیگر قرار گرفته‌اند. به طور کلی و با استدلالی مشابه، برای هر i (که $1 \leq i \leq 93$) کمان‌های $\widehat{A_iB_i}$ و $\widehat{A_{i+1}B_{i+1}}$ در جهت عکس یکدیگر قرار گرفته‌اند. (منظور از $\widehat{A_{94}B_{94}}$ همان $\widehat{A_1B_1}$ است.) از کنار هم قرار دادن تمام این نتایج نتیجه می‌گیریم کمان‌های $\widehat{A_1B_1}$ و $\widehat{A_1B_1}$ در جهت عکس یکدیگر قرار گرفته‌اند. (به فرد بودن ۹۳ توجه کنید!) پس کمان $\widehat{A_1B_1}$ یا $^\circ$ است یا 180° . در حالت اول دو چندضلعی بر هم منطبق‌اند، و در حالت دوم نسبت به مرکز دایره قرینه‌اند. بنابراین در هر حالت طول اضلاع متناظر آن‌ها برابر است. در نتیجه نسبت اضلاع متناظر دو چندضلعی اولیه برابر c است. \square



شکل راه حل

سوال ۴. در مثلث ABC داریم $\angle C = 90^\circ + \angle A$. نقطه D روی امتداد ضلع BC است به گونه‌ای که $AC = AD$. نقطه E را در طرف مقابل خط BC (که A در آن قرار ندارد) طوری انتخاب می‌کنیم که $\angle EBC = \angle A$ و $\angle EDC = \frac{\angle A}{2}$. ثابت کنید $\angle CED = \angle B$.

مرتضی تقفیان

اثبات. فرض کنید M وسط CD باشد، پس AM عمود منصف CD است. فرض کنید AM خطوط DE و BE را در P و Q قطع کند. در نتیجه $PC = PD$ داریم

$$\angle EBA + \angle CAB = \angle A + \angle B + \angle A = 180^\circ - \angle C + \angle A = 90^\circ$$

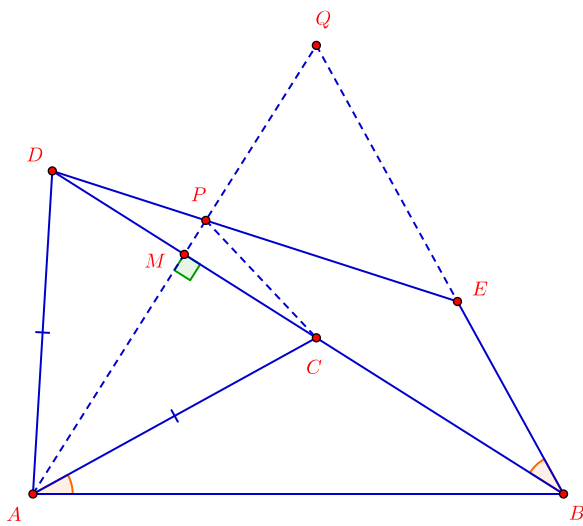
بنابراین خط AC بر BE عمود است. در نتیجه در مثلث ABQ ، BC و AC ارتفاع هستند، یعنی C مرکز ارتفاعی این مثلث است و

$$\angle CQE = \angle CQB = \angle A = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle A}{2} = \angle PDC + \angle PCD = \angle CPE$$

پس چهارضلعی $CPQE$ محاطی است. بنابراین

$$\angle CED = \angle CEP = \angle CQP = \angle CQA = \angle CBA = \angle B$$

□



شکل راه حل

سوال ۵. نقاط X و Y روی کمان BC از دایره محیطی مثلث ABC قرار دارند (کمانی که شامل رأس A نیست) به طوری که $\angle BAX = \angle CAY$. اگر P وسط وتر AX باشد، ثابت کنید $BP + CP > AY$.

ماهان تجربه‌کار

اثبات. M وسط وتر AX است، پس $OM \perp AX$. از B بر OM عمود می‌کنیم تا دایره را در Z قطع کند. چون $OM \perp BZ$ پس OM عمود منصف BZ می‌باشد، یعنی $MZ = MB$. با استفاده از نابرابری مثلث می‌توان گفت

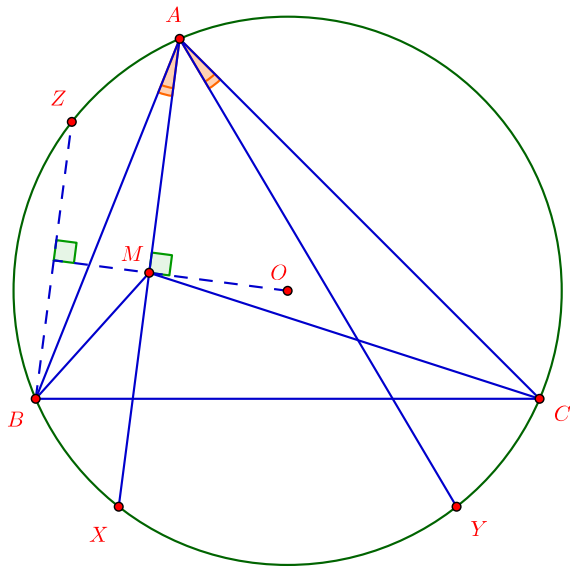
$$BM + MC = ZM + MC > CZ$$

اما $BZ \parallel AX$ ، پس

$$\widehat{AZ} = \widehat{BX} = \widehat{CY} \Rightarrow \widehat{ZAC} = \widehat{YCA} \Rightarrow CZ = AY$$

□

در نتیجه $BM + MC > AY$.



شکل راه حل

پاسخ‌های سطح پیشرفته

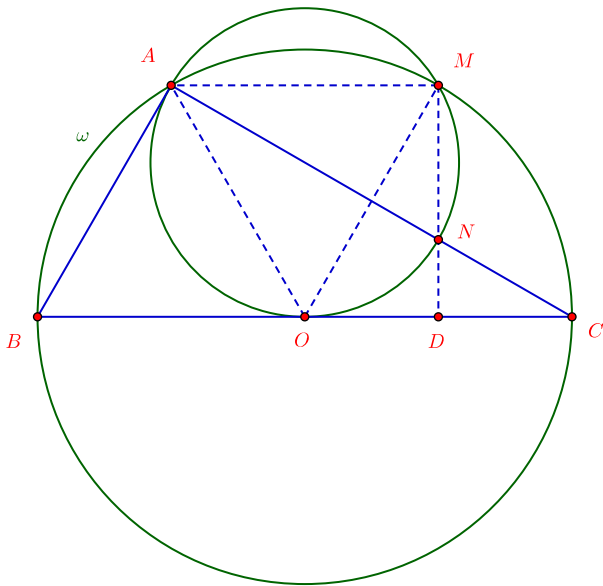
سوال ۱. مثلث قائم‌الزاویه ABC با رأس قائمه A مفروض است و داریم $\angle C = 30^\circ$. دایره‌ای از رأس A می‌گذرانیم تا بر وسط وتر این مثلث مماس شود. این دایره ضلع AC را در N ، و دایره محیطی مثلث ABC را در M قطع می‌کند. ثابت کنید $MN \perp BC$.

مهدی اعتصامی فرد

اثبات. فرض کنید خط MN ضلع BC را در D قطع کند. برای اثبات عمود بودن MN بر BC کافی است ثابت کنیم $\angle CND = 60^\circ$ ، یا معادلاً $\angle ANM = 60^\circ$. دایره ω در O بر BC مماس است، پس زاویه ظلّی $\angle AOB$ با زاویه محاطی $\angle AMO$ برابر است. از طرفی زاویه $\angle AOB$ زاویه مرکزی و در نتیجه دو برابر زاویه محاطی $\angle ACB$ است. پس

$$\angle AMO = \angle AOB = 2\angle ACB = 60^\circ$$

OA و OM دو شعاع از دایره محیطی ABC اند، پس $OA = OM$. بنابر دو نتیجه اخیر در مثلث متساوی‌الساقین AOM زاویه مجاور قاعده 60° درجه است. پس AOM متساوی‌الاضلاع است و $\angle AOM = 60^\circ$. زاویه‌های محاطی $\angle ANM$ و $\angle AOM$ رو به یک کمان از دایره ω قرار دارند، پس $\angle ANM = \angle AOM = 60^\circ$. \square



شکل راه حل

سوال ۲. در چهارضلعی $ABCD$ داریم $\angle B = \angle D = 60^\circ$. از نقطه M وسط ضلع AD ، خطی به موازات CD رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه P قطع کند. نقطه X روی خط CD قرار دارد به گونه‌ای که $BX = MX$. ثابت کنید $AB = BP$ اگر و تنها اگر $\angle MXB = 60^\circ$.

داود وکیلی

اثبات. نقطه X' را در همان سمت MB که X در آن قرار دارد طوری در نظر می‌گیریم که MBX' متساوی‌الاضلاع باشد. کافی است ثابت کنیم

$$AB = BP \Leftrightarrow X' = X$$

می‌خواهیم طرف اول را ثابت کنیم. $AB = BP$ ، پس مثلث ABP متساوی‌الاضلاع است. با دوران 60° (ساعت‌گرد) حول B نقاط A و M به ترتیب به P و X' تبدیل می‌شوند. یعنی مثلث‌های BAM و BPX' هم‌نهشت‌اند.

$$\angle X'PM = 360^\circ - \angle MPB - \angle BPX' = 360^\circ - \angle DCB - \angle BAM = 120^\circ$$

اما از توازی MP و DC به دست می‌آید $\angle PMD = 120^\circ$ ، پس اگر از X' خطی موازی CD رسم کنیم تا AD را در D' قطع کند چهارضلعی $MPX'D'$ دوزنقه متساوی‌الساقین خواهد بود. در نتیجه $PX' = MD'$. اما از هم‌نهشتی $\triangle BAM$ و $\triangle BPX'$ داریم $PX' = AM = MD$. از ترکیب دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم $MD' = MD$ ، یعنی D' بر D منطبق است و X' روی DC قرار دارد. بنابراین X' و X هر دو محل برخورد DC و عمود منصف MB ‌اند، و به وضوح منطبق‌اند.

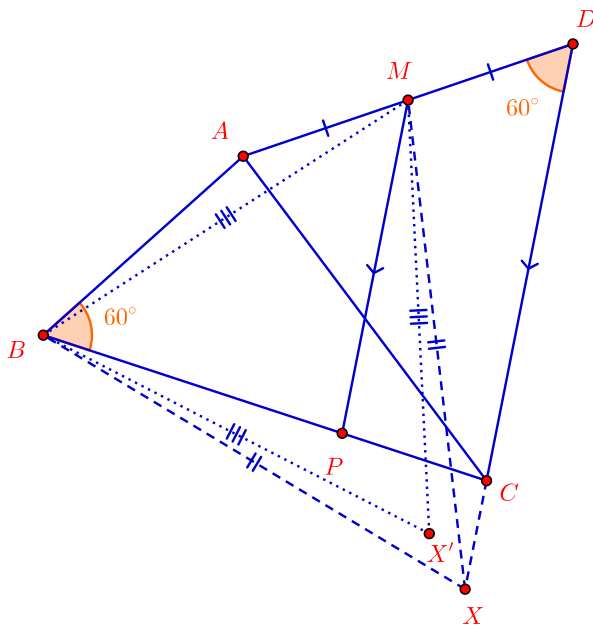
حال طرف دوم را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم X' بر X منطبق باشد، در این صورت با دوران 60° (ساعت‌گرد) حول B ، M به X و A به نقطه‌ای مثل P' روی BC تبدیل می‌شود. کافی است ثابت کنیم $P' = P$. از خطی موازی با

CD رسم می‌کنیم تا AD را در M' قطع کند. مشابه حالت قبل داریم

$$\angle XP'M' = 36^\circ - \angle MP'B - \angle BP'X = 36^\circ - \angle DCA - \angle BAM = 12^\circ$$

همچنین $\angle P'M'D = 12^\circ$. پس چهارضلعی $XP'M'D$ دوزنقه متساوی الساقین است و $DM' = P'X = AM = DM$ پس می‌توان گفت $M = M'$ ، و در نتیجه $P = P'$

□



شکل راه حل

سوال ۳. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. دایره به قطر BC اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. محل برخورد میانه نظیر رأس A و EF را P می‌نامیم. X نقطه‌ای دل‌خواه روی کمان EF و Y تقاطع دوم XP با دایره به قطر BC است. ثابت کنید $\angle YAX = \angle MYX$.

علی نوعلم

اثبات. محل برخورد دایره محیطی $\triangle AEF$ با AM را K می‌نامیم. MF بر دایره محیطی AEF در F مماس است، زیرا $\angle MFC = \angle MCF = \angle AEF$. پس $MF^2 = MK \cdot MA$ اما $MY = MF$ پس $MY^2 = MK \cdot MA$ یعنی

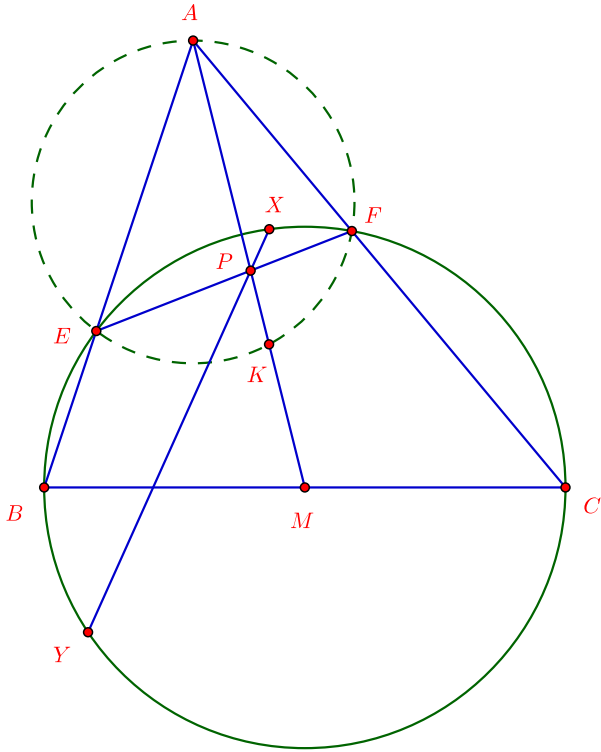
$$\angle MYK = \angle YAM \quad (1)$$

از طرفی $AP \cdot PK = PE \cdot PF = PX \cdot PY$ پس $AXKY$ محاطی است و در نتیجه

$$\angle XAK = \angle XYK \quad (2)$$

□

از تساوی‌های ۱ و ۲ داریم $\angle XAY = \angle MYX$.



شکل راه حل

سوال ۴. مماس در A بر دایرهٔ محیطی مثلث حاده‌الزاویهٔ $(AC > AB) ABC$ امتداد ضلع BC را در P قطع می‌کند. O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد. X روی OP طوری قرار دارد که $\angle AXP = 90^\circ$. E و F به ترتیب روی AB و AC و در یک طرف خط OT طوری قرار دارند که $\angle EXP = \angle ACX$ و $\angle FXO = \angle ABX$. اگر L و K محل برخورد EF با دایرهٔ محیطی ABC باشند (F روی پاره‌خط EL است) ثابت کنید PO بر دایرهٔ محیطی مثلث KLX مماس است.

مهدی اعتصامی‌فرد

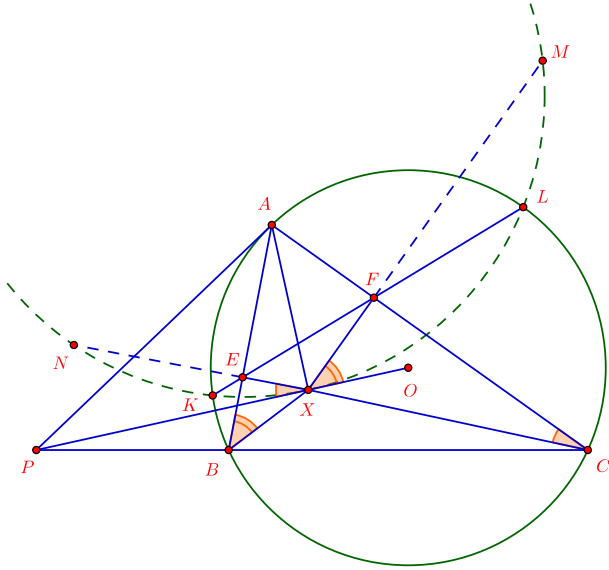
اثبات. نقاط M و N را روی امتداد XF و XE طوری در نظر می‌گیریم که $MLXKN$ محاطی شود. باید ثابت کنیم $\angle NMX = \angle NXP$. از طرفی $\angle ACX = \angle NXP$ ، پس باید ثابت کنیم $\angle ACX = \angle NMX$. با توجه به قوت دایره‌ها داریم

$$XF \cdot FM = FL \cdot FK = AF \cdot FC$$

پس $AMCX$ محاطی است و $\angle AMX = \angle ACX$. به طریق مشابه می‌توان گفت $ANMX$ هم محاطی است. حال کافی است ثابت کنیم $\angle AMX = \angle NMX$ ، یعنی ثابت کنیم A و N و M روی یک خط قرار دارند. از محاطی بودن $ANMX$ داریم

$$\begin{aligned} \angle NAM &= \angle NAE + \angle A + \angle FAM = \angle EXB + \angle A + \angle CXF \\ &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle AX + \angle ACX \\ &= \angle A + 180^\circ - \angle BXC + \angle BXC - \angle A = 180^\circ \end{aligned}$$

□



شکل راه حل

سوال ۵. دو نقطه P و Q روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارند و از وسط این ضلع به یک فاصله‌اند. عمودهای وارد از P و Q بر BC خطوط AC و AB را به ترتیب در E و F قطع می‌کنند. M محل برخورد PF و EQ می‌باشد. اگر H_1 و H_2 به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های BFP و CEQ باشند ثابت کنید $AM \perp H_1H_2$.

مهدی اعتصامی‌فرد

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم با حرکت P و Q ، AM ثابت می‌ماند. برای این کار نسبت $\frac{\sin \angle A_1}{\sin \angle A_2}$ را حساب می‌کنیم. طبق قضیه سینوس‌ها در $\triangle AFM$ و $\triangle AEM$ داریم

$$\frac{\sin \angle A_1}{\sin \angle A_2} = \frac{\sin \angle F_1}{\sin \angle E_1} \cdot \frac{FM}{EM} \quad (1)$$

همچنین برای مثلث‌های $\triangle FBP$ و $\triangle CEQ$ داریم

$$\left. \begin{aligned} \sin \angle F_1 &= \frac{BP}{PF} \cdot \sin \angle B \\ \sin \angle E_1 &= \frac{CQ}{EQ} \cdot \sin \angle C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin \angle F_1}{\sin \angle E_1} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} \cdot \frac{EQ}{FP} \quad (2)$$

بنابر تساوی‌های ۱ و ۲

$$\frac{\sin \angle A_1}{\sin \angle A_2} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} \cdot \frac{EQ}{FP} \cdot \frac{FM}{EM} \quad (3)$$

مثلث‌های FMQ و EMP متشابه‌اند، پس $\frac{EQ}{EM} = \frac{FM}{FP} = \frac{FQ}{FQ + EP}$ با جای‌گذاری در تساوی ۳ به دست می‌آید

$$\frac{\sin \angle A_1}{\sin \angle A_2} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} \cdot \frac{FQ}{EP} \quad (4)$$

از طرفی

$$\left. \begin{array}{l} \tan \angle B = \frac{FQ}{BQ} \\ \tan \angle C = \frac{EP}{CP} \\ BQ = CP \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{FQ}{EP} = \frac{\tan \angle B}{\tan \angle C}$$

اگر نتیجه را در تساوی ۴ جای گذاری کنیم خواهیم داشت

$$\frac{\sin \angle A_1}{\sin \angle A_2} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} \cdot \frac{\tan \angle B}{\tan \angle C}$$

که مقدار ثابتی است.

حال نشان می دهیم $H_1 H_2$ ها موازی اند. اگر α زاویه $H_1 H_2$ با BC باشد آن گاه می توان گفت

$$\tan \alpha = \frac{H_2 P - H_1 Q}{QP} \quad (5)$$

چون H_1 و H_2 مراکز ارتفاعی مثلث های BFP و CQE هستند داریم

$$QF \cdot H_1 Q = BQ \cdot QP \Rightarrow H_1 Q = \frac{BQ \cdot QP}{FQ}$$

$$EP \cdot H_2 P = CP \cdot PQ \Rightarrow H_2 P = \frac{CP \cdot PQ}{EP}$$

اما $BQ = CP$ پس

$$\Rightarrow H_2 P - H_1 Q = \frac{PQ \cdot BQ \cdot (FQ - EP)}{EP \cdot FQ}$$

با جای گذاری در تساوی ۵

$$\tan \alpha = \frac{BQ \cdot (FQ - EP)}{EP \cdot FQ} = \frac{BQ}{EP} - \frac{BQ}{FQ} = \frac{CP}{EP} - \frac{BQ}{FQ}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \cot \angle C - \cot \angle B \quad (6)$$

در نتیجه مقدار $\tan \alpha$ ثابت است، پس $H_1 H_2$ ها با هم موازیند.
 اگر زاویه θ را BC با AM بنامیم باید ثابت کنیم

$$\tan \alpha \cdot \tan \theta = 1$$

محل برخورد AM با BC را X می نامیم.

$$\frac{BX}{CX} = \frac{\sin \angle A_1}{\sin \angle A_2} \cdot \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} \Rightarrow \frac{BX}{CX} = \frac{\tan \angle B}{\tan \angle C}$$

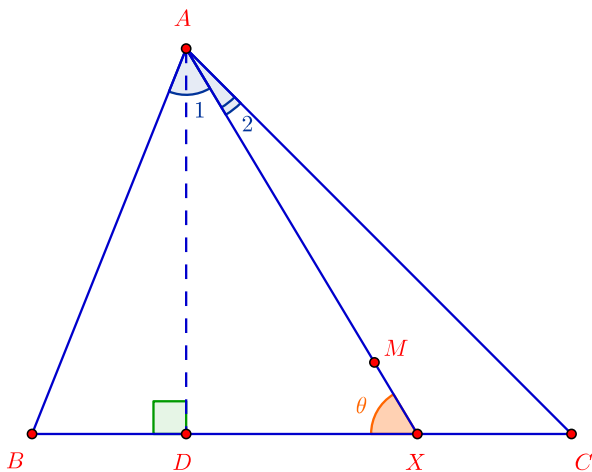
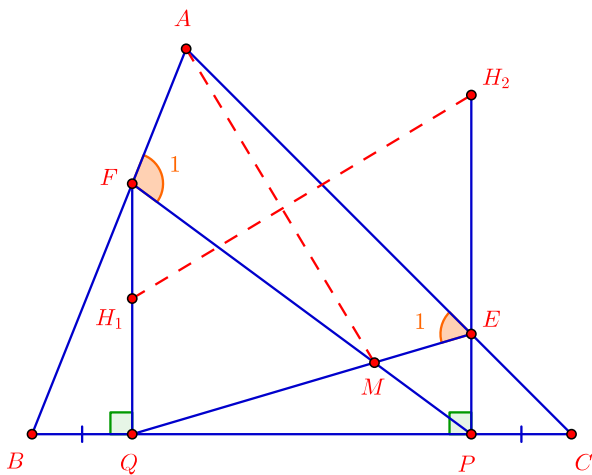
اگر D پای ارتفاع A باشد آن گاه می توان گفت

$$\frac{BX}{CX} = \frac{\tan \angle B}{\tan \angle C} = \frac{AD/BD}{AD/CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = CX$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{AD}{DX} = \frac{AD}{CD - CX} = \frac{AD}{CD - BD} \\ &= \frac{1}{CD/AD - BD/AD} = \frac{1}{\cot \angle C - \cot \angle B} \end{aligned}$$

□

بنابر تساوی ۶ و تساوی اخیر حکم مورد نظر اثبات می شود.



شکل راه حل