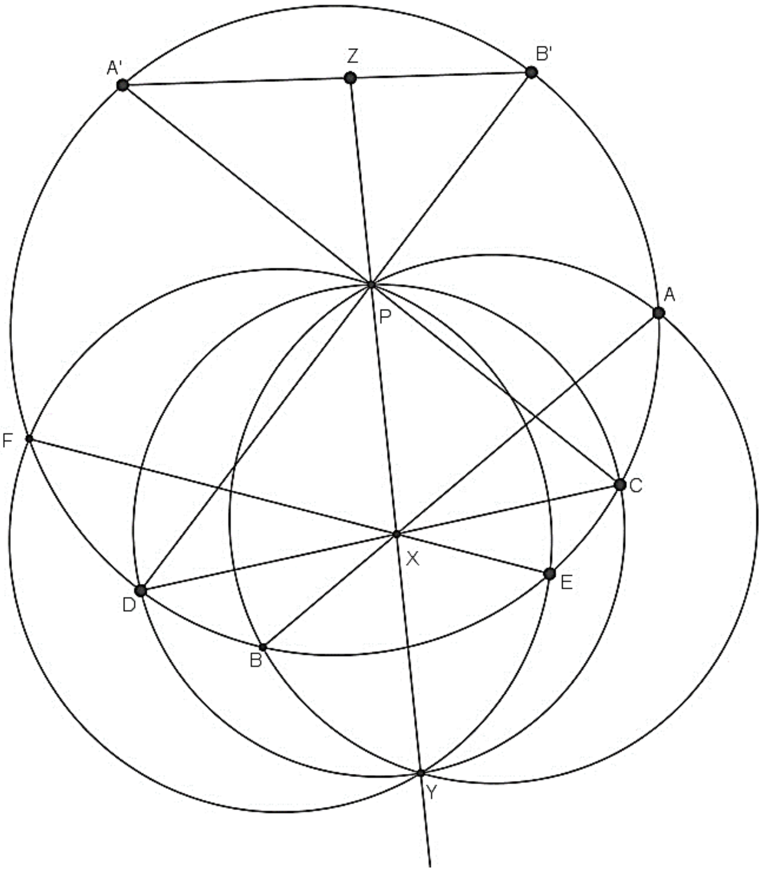
گردآورنده
فاطمه سجادی
مدال طلای کشوری
المپیاد ریاضی ۹۵

طرح و اثبات یک قضیه

قضیه: فرض کنید سه وتر AB, CD, EF از دایره W در X همرسند.نقطه دلخواه P را در نظر بگیرید و فرض کنید PA دایره را برای بار دوم در A' قطع کند به طور مشابه B', C', D', E', F' تعریف می شوند. در این صورت $A'B', C'D', E'F', PX$ همرسند.

اثبات اول:



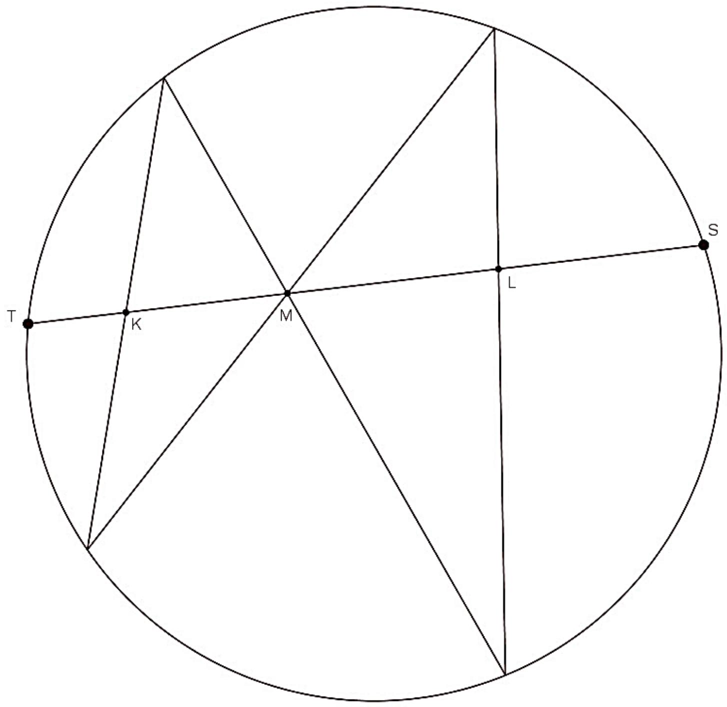
نقطه Y را روی PX طوری در نظر بگیرید که $P_W^{(X)} = XP.XY$. از طرفی داریم

$$P_W^{(X)} = XA.XB = XC.XD = XE.XF$$

پس چهارضلعی های $PABY, PCDY, PEFY$ محاطی هستند و دایره محیطی های آنها از نقاط P, Y میگذرند. با انعکاس حول P و با نسبت $P_W^{(P)}$ داریم منعکس نقاط A, B نقاط A', B' هستند پس منعکس دایره محیطی PAB , $A'B'$ است. حال چون دایره های محیطی PAB, PCD, PEF در Y همرسند پس منعکس های آنها نیز در منعکس Y یا همان Z همرسند. یعنی $A'B', C'D', E'F', PX$ همرسند.

اثبات دوم (تعمیم قضیه پروانه) :

درشکل زیر داریم



$$\frac{1}{MK} + \frac{1}{MS} = \frac{1}{ML} + \frac{1}{MT}$$

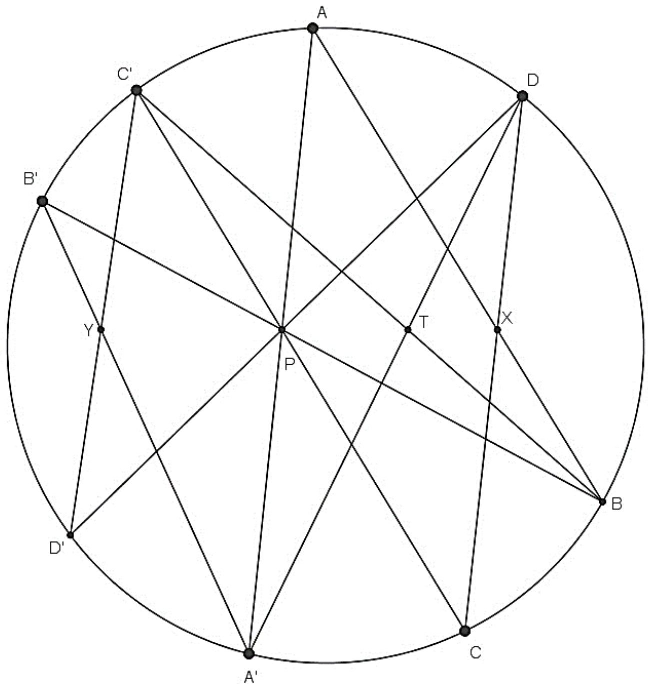
وتر PX را رسم کنید تا دایره را در U, V قطع کند و خطوط $A'B'$ و $C'D'$ و $E'F'$ را به ترتیب در Y_1 , Y_2, Y_3 قطع کند. بنابر تعمیم قضیه پروانه داریم:

$$\frac{1}{PY_1} = \frac{1}{PY_2} = \frac{1}{PY_3} = \frac{1}{PV} + \frac{1}{PX} - \frac{1}{PU}$$

پس $PY_1 = PY_2 = PY_3$ پس خطوط $A'B', C'D', E'F', PX$ همرسند.

اثبات سوم:

لم: فرض کنید نقطه P و دایره W مفروض باشد و چهار وتر AA', BB', CC', DD' از نقطه P بگذرند دراین صورت اگر تقاطع AB و CD برابر X باشد و تقاطع $A'B'$ و $C'D'$ برابر Y باشد P, X, Y همخط هستند.



تقاطع BC', DA' را T بنامید. بنابر قضیه پاسکال در شش ضلعی محاطی $ABC'CDA'$ داریم $(AB, CD) = X, (BC', DA') = T, (AA', CC') = P$ همخطند. بطور مشابه در شش ضلعی محاطی $DA'B'BC'D'$ نقاط P, Y, T همخطند. پس نقاط P, T, X, Y همخطند که این همان حکم مساله است.

بنابر لم برای ۴ خط AA', BB', CC', DD' داریم تقاطع AB, CD و P و تقاطع $A'B', C'D'$ همخطند. یعنی $PX, A'B', C'D'$ همرسند به طور مشابه $PX, A'B', E'F'$ همرسند و $PX, C'D', E'F'$ همرسند. پس چهار خط $PX, A'B', C'D', E'F$ همرسند که این همان حکم مساله است.

سوالات:

۱- مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید M, H به ترتیب مرکز ارتفاعی و مثلث و وسط BC باشند. فرض کنید AH دایره را در A_1 و MH دایره را در A' قطع کند به طوری که H بین M, A' باشد. خط $A'A_1$ را l_a مینامیم. l_b, l_c بطور مشابه تعریف میشوند. ثابت کنید l_a, l_b, l_c همرسند.

راه حل: فرض کنید O مرکز دایره محیطی مثلث باشد. تقاطع AO و دایره را در A'' درنظربگیرید. میدانیم $AA'' = ۲OA''$ و $AH = ۲OM$ و AH و OM موازی هستند. پس A'', M, H همخطند. سه وتر AA'' و BB'' و CC'' در O همرسند. پس طبق قضیه سه خط l_c و l_b و l_a همرسند.

۲- مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید H مرکز ارتفاعی مثلث باشد. از A خطی موازی BC رسم میکنیم تا دایره محیطی را برای بار دوم در A' قطع کند. فرض کنید $A'H$ دایره را برای بار دوم در A'' قطع کند. خط AA'' را l_a مینامیم. ثابت کنید l_c و l_b و l_a همرسند.

راه حل: فرض کنید AH دایره محیطی را در A_1 قطع کند. چون AA', BC موازی هستند پس $AA'A_1 = ۹۰^\circ$ پس $A'A_1$ از مرکز دایره محیطی ABC میگذرد. (مرکز دایره محیطی همان X در قضیه و H همان P در قضیه است) پس AA'', BB'', CC'' همرسند.

تمرینات بیشتر:

۱- (تعمیم سوال قبل) مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید P نقطه ای روی خط اویلر مثلث باشد. از A خطی موازی BC رسم میکنیم تا دایره را در A' قطع کند. فرض کنید $A'P$ دایره را در A'' قطع کند. به طور مشابه B'', C'' را نیز تعریف کنید. ثابت کنید AA'', BB'', CC'' همرسند.

۲- مثلث حاده الزاویه ABC مفروض است. فرض کنید I_a و I به ترتیب مراکز دایره محاطی خارجی نظیر راس A و دایره محاطی داخلی باشند. D پای نیمساز خارجی نظیر راس A روی BC است. از I بر DI_a عمودی رسم می کنیم تا دایره را در A' قطع کند. به طور مشابه B', C' را تعریف میکنیم. ثابت کنید AA', BB', CC' همرسند.

(راهنمایی: ثابت کنید وسط کمان BAC و A' , I همخط هستند.)