به نام خدا

پنجمین المپیاد هندسه‌ی ایران

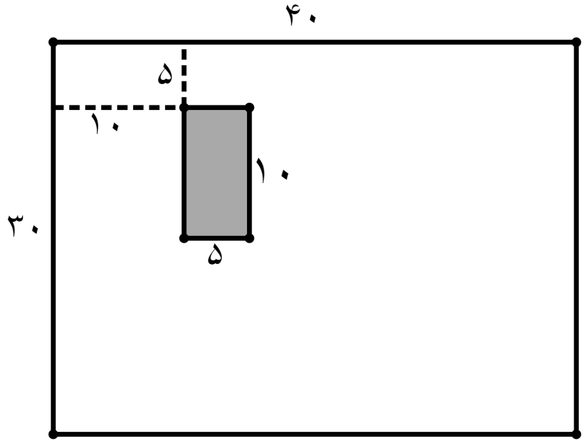
دفترچه‌ی سؤالات آزمون‌ها به همراه راه‌حل‌ها

فهرست مطالب

سطح مقدماتی

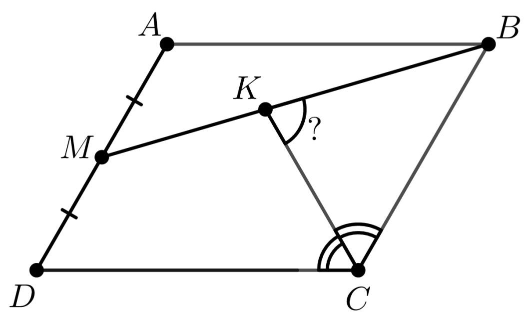
سؤالات

۱. همانطور که در شکل نشان داده شده است، کاغذی به شکل مستطیل ۳۰ × ۴۰ داریم که یک مستطیل هاشور خورده به ابعاد ۱۰ × ۵ درون آن قرار دارد. می‌خواهیم با استفاده از چهار برش، شکل هاشور خورده را از کاغذ خارج کنیم. هر برش یک خط صاف است که کاغذ را به دو تکه تقسیم می‌کند، تکه شامل شکل را نگه می‌داریم و تکه دیگر را دور می‌اندازیم. می‌خواهیم طول برش هایمان در مجموع کمترین حالت ممکن باشد. چگونه این کار را انجام دهیم و مجموع طول برش هایمان چقدر است؟ نیازی به اثبات نیست، فقط عدد مطلوب را به همراه برش‌هایی که به آن منتهی می‌شوند بنویسید.



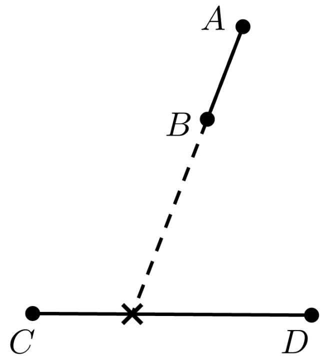
۲. شش‌ضلعی محدب $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ درون شش‌ضلعی محدب $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ داده شده است به طوری که $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ ، $A_2A_3 \parallel B_2B_3$ ، ... و $A_6A_1 \parallel B_6B_1$ است.
ثابت کنید مساحت شش‌ضلعی‌های ساده‌ی $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ و $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ با یکدیگر برابر است. (شش‌ضلعی ساده، شش‌ضلعی‌ای است که با خودش برخورد نداشته‌باشد.)

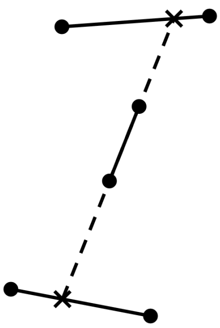
۳. در شکل مقابل، $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. می‌دانیم $\angle D = 60^\circ$، $AD = 2$ و $AB = \sqrt{3} + 1$. نقطه‌ی M وسط AD است. پاره‌خط CK نیمساز زاویه‌ی C می‌باشد. مقدار زاویه‌ی CKB را بیابید.



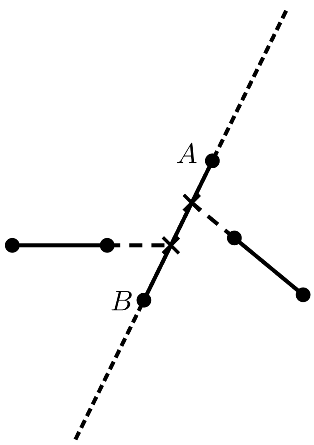
۴. دو دایره‌ی دلخواه به مراکز O_1, O_2 درون دایره‌ی ω قرار داشته و به آن مماسند. وتر AB از ω به این دو دایره مماس است به طوری که این دو دایره در دو طرف این وتر هستند. ثابت کنید $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90^\circ$.

۵. تعدادی پاره‌خط در صفحه مفروضند به طوری که هیچ دوتایی نقطه‌ی مشترک (حتی در نقاط انتهایی) ندارند. می‌گوییم پاره‌خط AB به پاره‌خط CD ***نفوذ می‌کند*** اگر امتداد AB در یک نقطه‌ی بین C و D با CD برخورد داشته باشد.





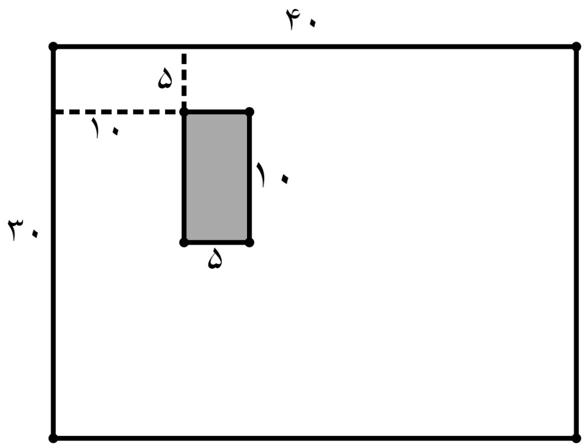
(آ) آیا ممکن است که هر پاره خط را که از هر دو طرف امتداد دهیم، از هر طرف به دقیقاً یک پاره خط دیگر نفوذ کند؟



(ب) به یک پاره‌خط می‌گوییم ***محاصره‌شده*** اگر از هر دو طرف آن پاره‌خط، دقیقا یک پاره‌خط باشد که به آن نفوذ کند. مانند پاره‌خط AB در شکل. آیا ممکن است همه‌ی پاره‌خط ها محاصره‌شده باشند؟

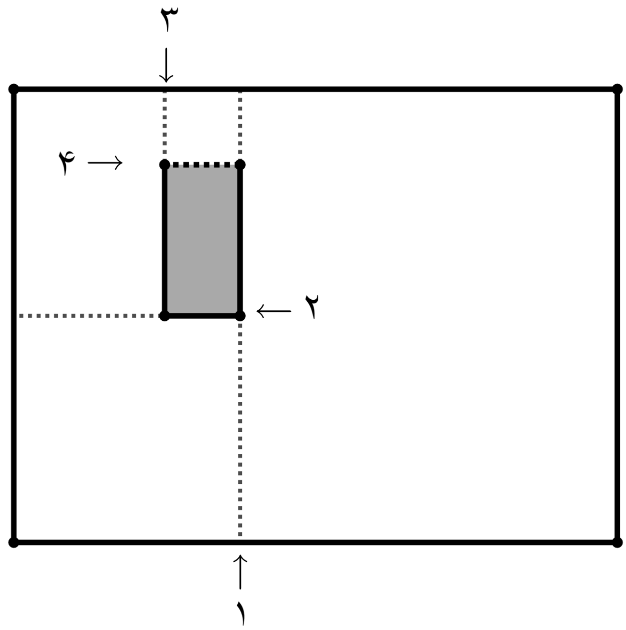
راه‌حل‌ها

۱. همانطور که در شکل نشان داده شده است، کاغذی به شکل مستطیل ۳۰ × ۴۰ داریم که یک مستطیل هاشور خورده به ابعاد ۱۰ × ۵ درون آن قرار دارد. می‌خواهیم با استفاده از چهار برش، شکل هاشور خورده را از کاغذ خارج کنیم. هر برش یک خط صاف است که کاغذ را به دو تکه تقسیم می‌کند، تکه شامل شکل را نگه می‌داریم و تکه دیگر را دور می‌اندازیم. می‌خواهیم طول برش هایمان در مجموع کمترین حالت ممکن باشد. چگونه این کار را انجام دهیم و مجموع طول برش هایمان چقدر است؟ نیازی به اثبات نیست، فقط عدد مطلوب را به همراه برش‌هایی که به آن منتهی می‌شوند بنویسید.



مرتضی ثقفیان

راه‌حل. پاسخ برابر ۶۵ می‌باشد. یک مثال برای برش‌های مناسب، شکل زیر است:



.

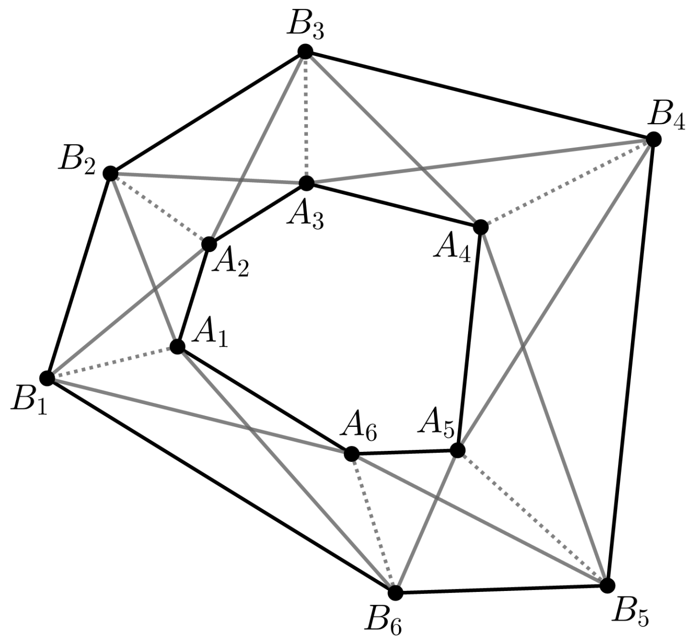
■

۲. شش‌ضلعی محدب $B_۱B_۲B_۳B_۴B_۵B_۶$ درون شش‌ضلعی محدب $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ داده شده است به طوری که $B_۱B_۲ \parallel A_۱A_۲$ ، $B_۲B_۳ \parallel A_۲A_۳$ ، ... و $B_۶B_۱ \parallel A_۶A_۱$ است.

ثابت کنید مساحت شش‌ضلعی‌های ساده‌ی $A_۱B_۲A_۳B_۴A_۵B_۶$ و $B_۱A_۲B_۳A_۴B_۵A_۶$ با یکدیگر برابر است. (شش‌ضلعی ساده، شش‌ضلعی‌ای است که با خودش برخورد نداشته‌باشد.)

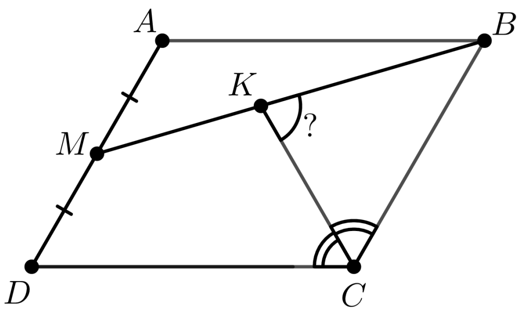
مهدی اعتصامی‌فرد ـ هیراد عالی‌پناه

راه‌حل. همان‌طور که می‌بینید، مساحت بین دو شش‌ضلعی را به ۶ ذوزنقه افراز کرده‌ایم. در هر ذوزنقه به سادگی می‌توان دید که برخی مثلث ها مساحت برابر دارند. (مانند $B_۱A_۱A_۲$ و $B_۲A_۱A_۲$) و هر یک، به یکی از دو شش‌ضلعی مدنظر سؤال تعلق دارند. بنابراین اگر این مساحت‌ها را به همراه مساحت ناحیه‌ی مشترک (مساحت $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$) جمع بزنیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم مساحت دو شش‌شلعی گفته‌شده برابر است.



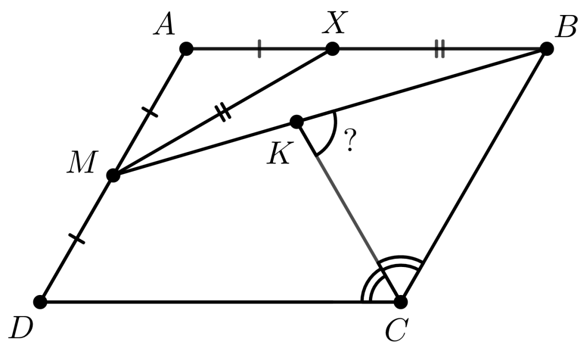
■

۳. در شکل مقابل، $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. می‌دانیم $\angle D = ۶۰^\circ$، $AD = ۲$ و $AB = \sqrt{۳} + ۱$. نقطه‌ی M وسط AD است. پاره‌خط CK نیمساز زاویه‌ی C می‌باشد. مقدار زاویه‌ی CKB را بیابید.



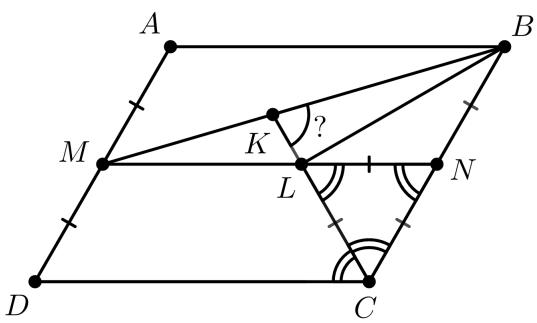
مهدی اعتصامی‌فرد

راه حل ۱. فرض کنید X نقطه‌ای روی AB باشد بطوری که $AX = ۱$ و $XB = \sqrt{۳}$. می‌دانیم $\angle MAX = ۱۲۰^\circ$. پس بر اساس قضیه فیثاغورس داریم $MX = \sqrt{۳}$. بنابراین $\angle MBX = ۱۵^\circ$ و $\angle CBK = ۴۵^\circ$. لذا، $\angle CKB = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۴۵^\circ = ۷۵^\circ$.



■

راه‌حل ۲. فرض کنید N وسط ضلع BC باشد. MN با CK در نقطه‌ی L برخورد می‌کند. واضح است که مثلث CNL متساوی‌الاضلاع است. پس داریم $LN = CN = NB$. بنابراین، BCL یک مثلث قائم‌الزاویه است. بر اساس قضیه‌ی فیثاغورس داریم $BL = \sqrt{۳}$. از جهت دیگر، داریم $ML = \sqrt{۳}$ و $\angle BLN = ۳۰^\circ$. به همین دلیل داریم $\angle LBM = ۱۵^\circ$ و لذا $\angle CBK = ۳۰^\circ + ۱۵^\circ = ۴۵^\circ$. پس، $\angle CKB = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۴۵^\circ = ۷۵^\circ$.



■

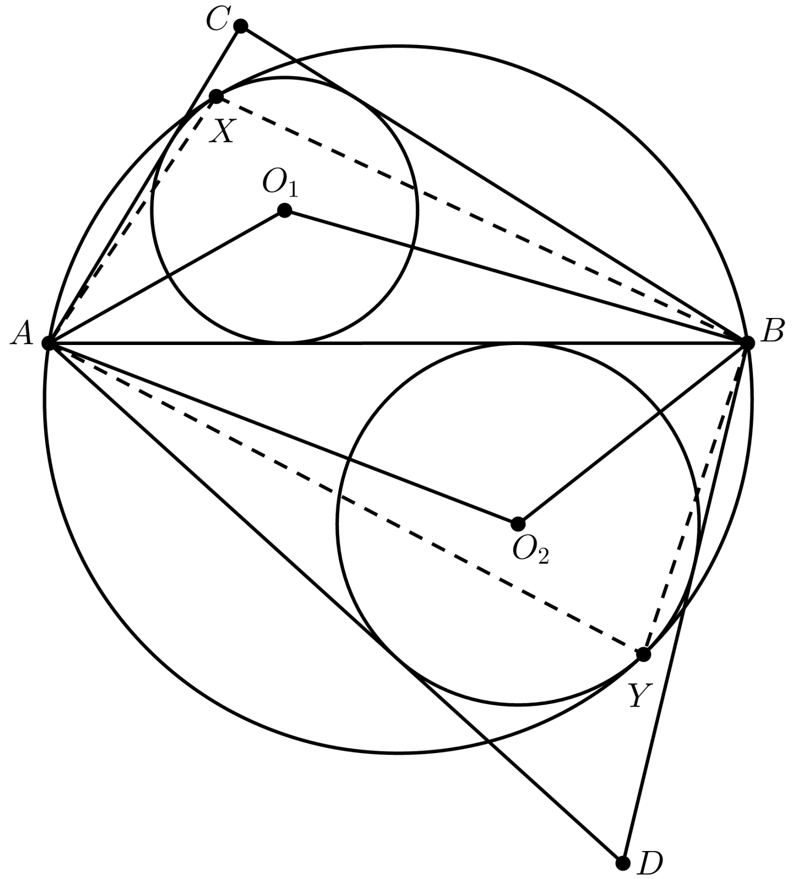
۴. دو دایره‌ی دلخواه به مراکز $O_{۱}, O_{۲}$ درون دایره‌ی ω قرار داشته و به آن مماسند. وتر AB از ω به این دو دایره مماس است به طوری که این دو دایره در دو طرف این وتر هستند. ثابت کنید $\angle O_{۱}AO_{۲} + \angle O_{۱}BO_{۲} > ۹۰^\circ$.

ایمان مقصودی

راه‌حل. فرض کنید AC, BC مماس‌های وارد شده از A, B به دایره به مرکز $O_{۱}$ باشند و AD, BD مماس‌های وارد شده از A, B به دایره به مرکز $O_{۲}$ باشند. کافیست نشان دهیم $\angle CAD + \angle CBD > ۱۸۰^\circ$. یا نشان دهیم

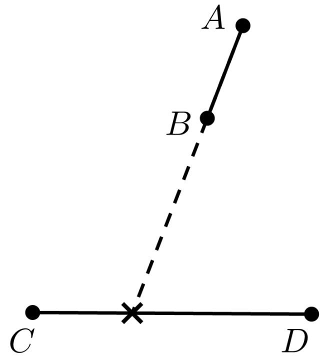
$$\angle ACB + \angle ADB < ۱۸۰^\circ.$$

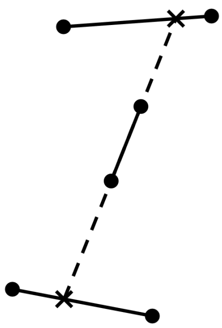
می‌دانیم که C, D بیرون دایره‌ی ω قرار داردن. پس می‌توان گفت $\angle ACB < \angle AXB$ و $\angle ADB < \angle AYB$ زیرا زاویه‌ی خارجی‌اند. اما می‌دانیم $\angle AXB + \angle AYB = ۱۸۰^\circ$. لذا می‌توانیم نتیجه بگیریم $\angle ACB + \angle ADB < ۱۸۰^\circ$ و مسأله اثبات می‌شود.



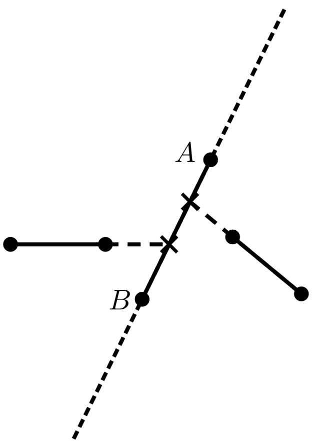
■

۵. تعدادی پاره‌خط در صفحه مفروضند به طوری که هیچ دوتایی نقطه‌ی مشترک (حتی در نقاط انتهایی) ندارند. می‌گوییم پاره‌خط AB به پاره‌خط CD ***نفوذ می‌کند*** اگر امتداد AB در یک نقطه‌ی بین C و D با CD برخورد داشته باشد.





(آ) آیا ممکن است که هر پاره خط را که از هر دو طرف امتداد دهیم، از هر طرف به دقیقاً یک پاره خط دیگر نفوذ کند؟

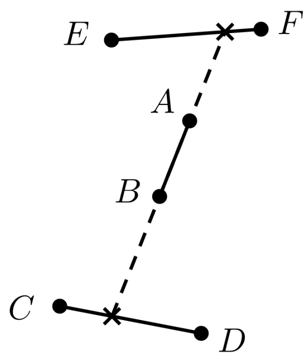


(ب) به یک پاره‌خط می‌گوییم ***محاصره‌شده*** اگر از هر دو طرف آن پاره‌خط، دقیقا یک پاره‌خط باشد که به آن نفوذ کند. مانند پاره‌خط AB در شکل. آیا ممکن است همه‌ی پاره‌خط ها محاصره‌شده باشند؟

مرتضی ثقفیان

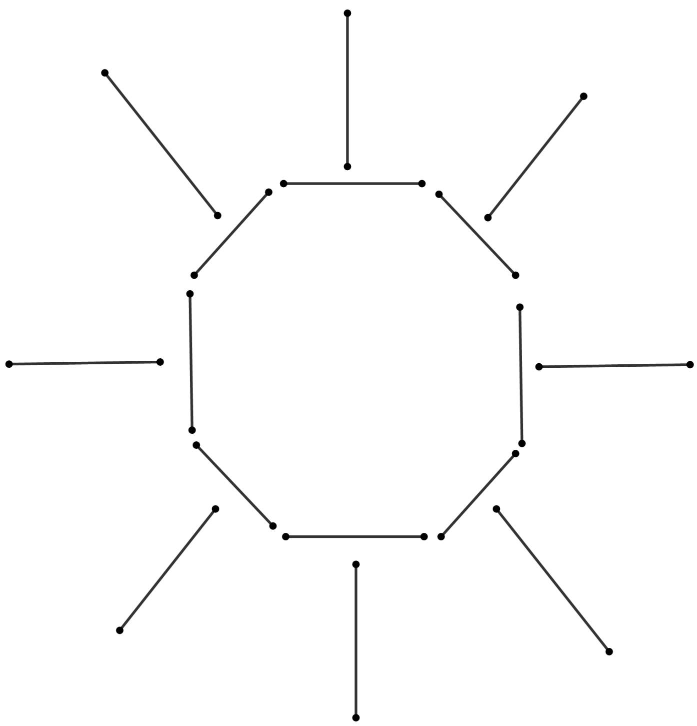
راه‌حل.

(آ) خیر. پوش‌محدب تقاط انتهایی پاره‌خط‌ها را در نظر بگیرید. فرض کنید A یک رأس از پوش‌محدب باشد و AB یکی از پاره‌خط‌ها.



می‌دانیم پاره‌خط‌هایی مانند CD, EF مطابق شکل بالا وجود دارند. پس A درون پوش محدب نقاط C, D, E, F قرار دارد؛ پس نمی‌تواند یک رأس از پوش‌محدب کلی باشد. تناقض حاصل یعنی پاسخ این قسمت منفی است. □

(ب) بله. شکل زیر یک مثال است که نشان می‌دهد که ممکن است همه‌ی پاره‌خط‌ها محاصره‌شده باشند.



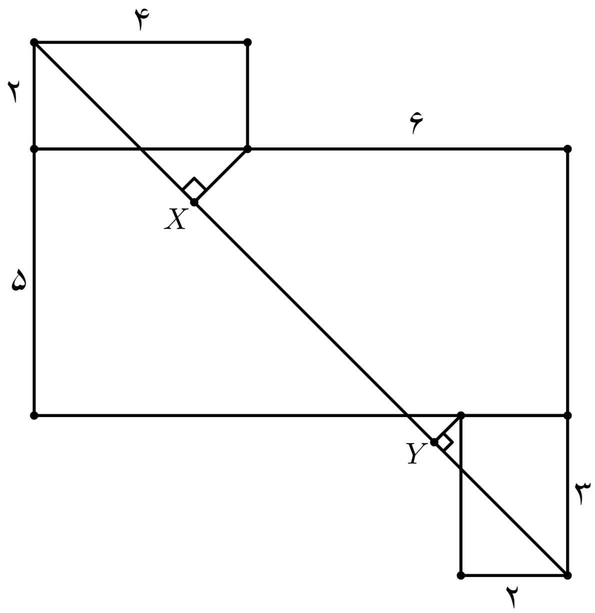
□

■

سطح متوسط

سؤالات

۱. در شکل زیر سه مستطیل قرار دارد و طول برخی از پاره‌خط‌ها در کنار آن مشخص شده است. اندازه‌ی پاره‌خط XY را بیابید.



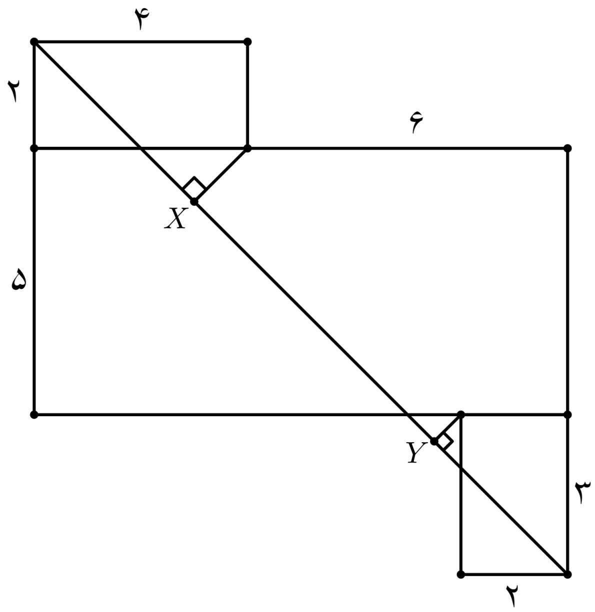
۲. در چهارضلعی محدب $ABCD$، قطرهای AC و BD یکدیگر را در P قطع می کنند. می‌دانیم $\angle DAC = ۹۰^\circ$ و $۲\angle ADB = \angle ACB$. اگر داشته باشیم $\angle DBC + ۲\angle ADC = ۱۸۰^\circ$، ثابت کنید $۲AP = BP$.

۳. دو دایره‌ی $\omega_۱, \omega_۲$ به ترتیب به مرکزهای $O_۱, O_۲$ در دو نقطه‌ی A, B متقاطعند. خط $O_۱B$ برای بار دوم در نقطه‌ی C با $\omega_۲$، و خط $O_۲A$ برای بار دوم در نقطه‌ی D با $\omega_۱$ برخورد می‌کنند. نقاط X و Y به ترتیب محل دوم برخورد AC با $\omega_۱$، و محل دوم برخورد BD با $\omega_۲$ هستند. ثابت کنید $CX = DY$.

۴. در یک چندوجهی، همه‌ی وجوه مثلث هستند. از یک نقطه‌ی دلخواه مانند P روی یکی از یال‌ها شروع می‌کنیم که وسط آن یال نبوده و از رئوس چندوجهی نیز نمی‌باشد. قرار می‌دهیم $P_۰ = P$. در هر مرحله از P_i به مرکز ثقل یکی از وجوهی که آن را شامل است وصل می‌کنیم تا محیط آن وجه را برای بار دوم در $P_{i+۱}$ قطع کند. این کار را از $P_{i+۱}$ و با وجهی دیگر ادامه می‌دهیم. ثابت کنید با تکرار این فرایند، نمی‌توانیم همه‌ی وجوه را ببینیم. (مرکز ثقل یک مثلث، محل همرسی میانه‌های آن است.)

۵. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌دانیم $\angle DAC = ۹۰^\circ$. فرض کنید H پای عمود وارد شده از رأس A بر DC باشد. نقطه‌ی P در امتداد AC طوری قرار دارد که PD بر دایره‌ی محیطی مثلث ABD مماس است. ثابت کنید $\angle PBA = \angle DBH$.

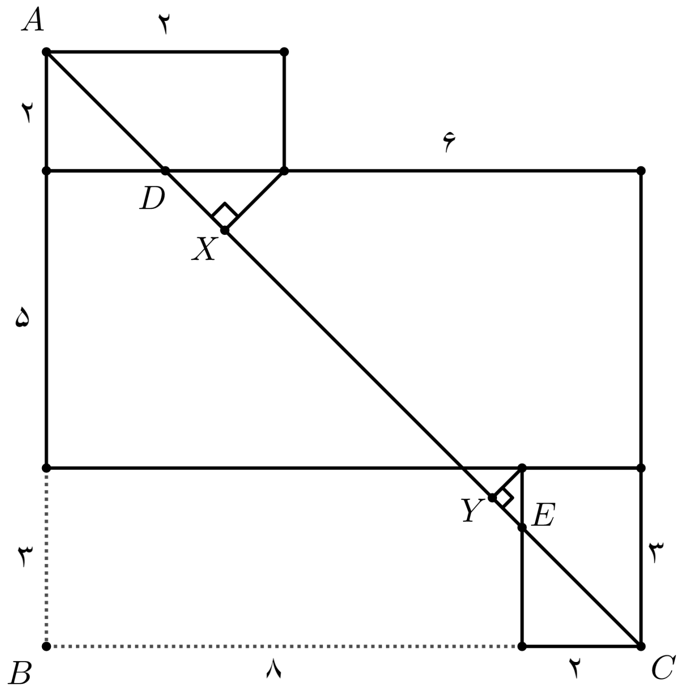
۱. در شکل زیر سه مستطیل قرار دارد و طول برخی از پاره‌خط‌ها در کنار آن مشخص شده است. اندازه‌ی پاره‌خط XY را بیابید.



هیراد عالی‌پناه

راه‌حل. اضلاع مستطیل‌ها را ادامه می‌دهیم تا مثلث ABC ایجاد شود. از آنجا که $AB = BC$ می‌توان نتیجه گرفت $\angle BCA = \angle BAC = ۴۵^\circ$. پس می‌توانیم طول برخی از پاره‌خط‌ها را با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس پیدا کنیم. مانند $AD = ۲\sqrt{۲}$، $DX = \sqrt{۲}$، $CE = ۲\sqrt{۲}$ و $EY = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$. پس داریم

$$XY = AC - AD - DX - CE - EY = ۱۰\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$$

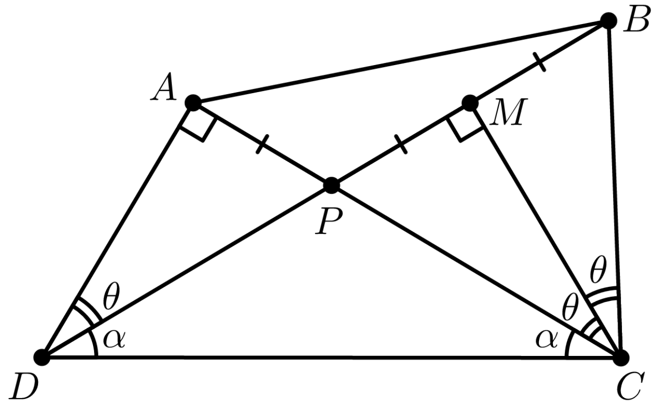


■

۲. در چهارضلعی محدب $ABCD$، قطرهای AC و BD یکدیگر را در P قطع می کنند. می‌دانیم $\angle DAC = ۹۰^\circ$ و $۲\angle ADB = \angle ACB$. اگر داشته باشیم $\angle DBC + ۲\angle ADC = ۱۸۰^\circ$، ثابت کنید $۲AP = BP$.

ایمان مقصودی

راه‌حل.



فرض کنید M نقطه‌ی برخورد نیمساز زاویه‌ی $\angle PCB$ با پاره‌خط PB باشد. از آنجایی که $\angle PCM = \angle PDA = \theta$ و $\angle APD = \angle MPC$، خواهیم داشت $\triangle PMC \sim \triangle PAD$، که یعنی $\angle PMC = ۹۰^\circ$.
اکنون در مثلث CPB، نیمساز زاویه‌ی رأس C همان ارتفاع وارد شده از رأس C می‌باشد، این یعنی CPB یک مثلث متساوی‌الساقین بوده و $PM = MB, PC = CB$.
در مثلث DBC داریم

$$\widehat{DBC} + ۲\theta + \widehat{PCD} + \widehat{PDC} = ۱۸۰^\circ.$$

این به همراه فرض سؤال که $\angle DBC + ۲\angle ADC = ۱۸۰^\circ$، نتیجه می‌دهد $\angle PCD = \angle PDC$. پس $PC = PD$ و لذا $\triangle PMC \cong \triangle PAD$، بنابراین $AP = PM = \frac{PB}{۲}$. ■

۳. دو دایره‌ی $\omega_۱, \omega_۲$ به ترتیب به مرکزهای $O_۱, O_۲$ در دو نقطه‌ی A, B متقاطعند. خط $O_۱B$ برای بار دوم در نقطه‌ی C با $\omega_۲$، و خط $O_۲A$ برای بار دوم در نقطه‌ی D با $\omega_۱$ برخورد می‌کنند. نقاط X و Y به ترتیب محل دوم برخورد AC با $\omega_۱$، و محل دوم برخورد BD با $\omega_۲$ هستند. ثابت کنید $CX = DY$.

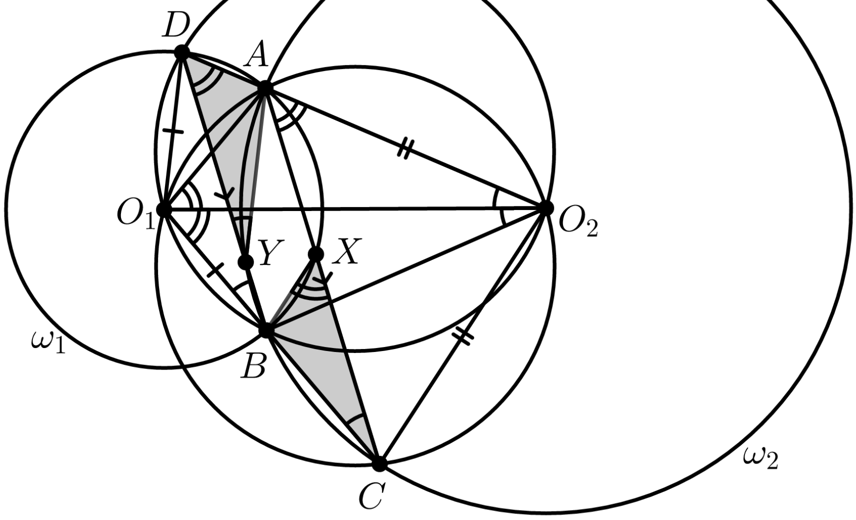
علیرضا دادگرنیا

راه‌حل. در ابتدا از یک لم شناخته‌شده کمک می گیریم.

لم. *فرض کنید $PQRS$ یک چهارضلعی محدب باشد و $RQ = RS$، $\angle RPQ = \angle RPS$ و $PQ \neq PS$. آنگاه $PQRS$ محاطی است.*

اثبات. خلاف ادعا را فرض کنید، و فرض کنید $P' \neq P$ محل برخورد دایره‌ی گذرنده از نقاط R, S, Q با خط PR باشد. چون $P'QRS$ محاطی است و $RQ = RS$، خواهیم داشت $\angle SP'R = \angle QP'R$. اکنون به مثلث‌های $SP'P$ و $QP'P$ دقت کنید. در این دو مثلث داریم $\angle SP'P = \angle QP'P$ و همچنین $\angle P'PQ = \angle P'PS$. این یعنی دو مثلث هم‌نهشت بوده و $PQ = PS$، که یک تناقض است. تناقض حاصل درستی لم را نتیجه می‌دهد.

برگردیم به مسأله.



مثلث‌های ADY و BXC مشابهند، زیرا

$$\widehat{ADY} = \widehat{BXC} = ۱۸۰^\circ - \widehat{BXA},$$

و

$$\widehat{DYA} = \widehat{BCX} = ۱۸۰^\circ - \widehat{AYB}.$$

دقت کنید که $O_۲$ روی نیمساز $\angle AO_۱B$ قرار دارد، $O_۲A = O_۲C$ و همچنین $O_۱A \neq O_۱C$. پس می‌توانیم لم گفته شده

را به کار ببریم و نتیجه بگیریم $O_۱AO_۲C$ محاطی است. مشابهاً، $O_۲BO_۱D$ نیز ثابت می‌شود که محاطیست. پس

$$\widehat{AYD} = ۱۸۰^\circ - \widehat{AYB} = \widehat{O_۱CA} = \widehat{O_۱O_۲A} = \widehat{O_۱BD}.$$

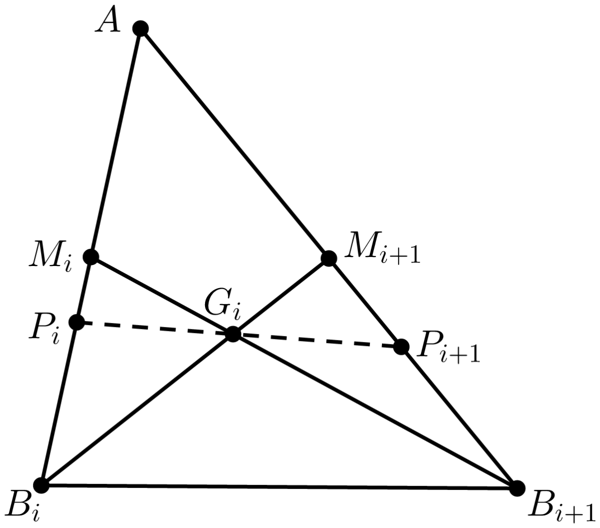
که یعنی $BD \parallel AC$ و لذا $AY = BC$. ولی از آنجا که $\triangle ADY \sim \triangle BXC$، نتیجه می‌گیریم این دو مثلث هم‌نهشت بوده و $CX = DY$. ■

۴. در یک چندوجهی، همه‌ی وجوه مثلث هستند. از یک نقطه‌ی دلخواه مانند P روی یکی از یال‌ها شروع می‌کنیم که وسط آن یال نبوده و از رئوس چندوجهی نیز نمی‌باشد. قرار می‌دهیم $P_0 = P$. در هر مرحله از P_i به مرکز ثقل یکی از وجوهی که آن را شامل است وصل می‌کنیم تا محیط آن وجه را برای بار دوم در P_{i+1} قطع کند. این کار را از P_{i+1} و با وجهی دیگر ادامه می‌دهیم. ثابت کنید با تکرار این فرایند، نمی‌توانیم همه‌ی وجوه را ببینیم. (مرکز ثقل یک مثلث، محل همرسی میانه‌های آن است.)

مهدی اعتصامی‌فرد ـ مرتضی ثقفیان

راه‌حل. فرض کنید AB یالی باشد که P روی آن قرار دارد. فرض کنید M وسط AB باشد و بدون لطمه به کلیت مسأله، فرض کنید P بین B و M قرار دارد. نشان می‌دهیم هرگز از وجهی که شامل A نیست نخواهیم گذشت. (چنین وجهی در هر چندوجهی‌ای وجود دارد.)

فرض کنید $B = B_0, B_1, B_2, \ldots$ رئوس مجاور A به همین ترتیب باشند. فرض کنید M_i وسط AB_i باشد. با استقرا، نشان می‌دهیم برای هر i، P_i روی یال AB_i، بین B_i و M_i قرار دارد. برای $i = 0$ ادعا درست است. اکنون درستی ادعا را برای i فرض کنید و مثلث AB_iB_{i+1} با مرکز ثقل G_i را در نظر بگیرید.

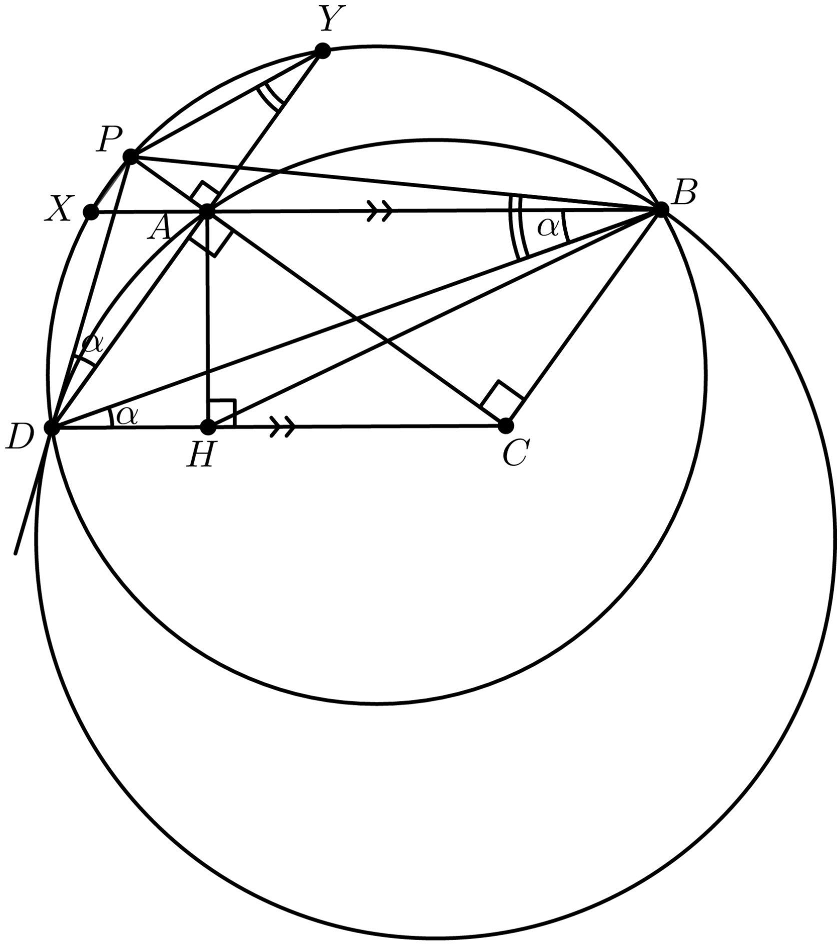


از آنجا که P_i بین M_i و B_i قرار دارد، نتیجی می‌گیریم که P_iG_i بین M_iG_i و B_iG_i، که میانه‌های مثلث هستند، قرار دارد. پس P_{i+1} روی AB_{i+1}، بین M_{i+1} و B_{i+1} قرار دارد. پس ادعا به کمک استقرا ثابت شد.

نشان دادیم که P_iها روی AB_iها قرار دارند، پس دنباله‌ی نقاط P_i حول A قرار داشته و بنابراین، با وجهی که شامل A نیست تقاطعی ندارد. ■

۵. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌دانیم $\angle DAC = 90^\circ$. فرض کنید H پای عمود وارد شده از رأس A بر DC باشد. نقطه‌ی P در امتداد AC طوری قرار دارد که PD بر دایره‌ی محیطی مثلث ABD مماس است. ثابت کنید $\angle PBA = \angle DBH$.

ایمان مقصودی



فرض کنید AB, AD دایره‌ی محیطی مثلث PDB را برای بار دوم به ترتیب در نقاط X, Y قطع کنند. فرض کنید $\angle CDB = \alpha$ و $\angle ADB = \theta$. بنابراین، داریم $\angle ABD = \alpha$، لذا $\angle ADP = \alpha$.
همچنین $\angle PDB = \angle PXB = \alpha + \theta$، و $\angle PAX = \angle ACD = \angle DAH$. که نتیجه می‌دهد

$$\overset{\triangle}{APX} \sim \overset{\triangle}{ADH} \Longrightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AX}{AD},$$

$$\overset{\triangle}{XAD} \sim \overset{\triangle}{YAB} \Longrightarrow \frac{AY}{AB} = \frac{AX}{AD},$$

$$\Longrightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AY}{AB}.$$

از آنجایی که $\angle HAB = \angle PAY = ۹۰^\circ$، می‌توان نوشت $\overset{\triangle}{APY} \sim \overset{\triangle}{AHB}$.

$$\Longrightarrow \widehat{HBA} = \widehat{PYA} = \widehat{PBD} \implies \widehat{PBA} = \widehat{DBH}.$$

■

سطح پیشرفته

سؤالات

۱. دو دایره‌ی ω_1, ω_2 در نقاط A و B متقاطعند. PQ مماس مشترک خارجی این دو دایره است که $P \in \omega_1$ و $Q \in \omega_2$. نقطه‌ی X روی ω_1 به طور دلخواه اختیار شده است. خط AX برای بار دوم در Y با ω_2 برخورد می‌کند. نقطه $Y' \neq Y$ روی ω_2 طوری قرار دارد که $QY = QY'$. خط $Y'B$ برای بار دوم در X' با ω_1 برخورد می‌کند. ثابت کنید $PX = PX'$.

۲. در مثلث حاده‌ی ABC می‌دانیم $\angle A = ۴۵^\circ$. نقاط O و H به ترتیب مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز ارتفاعی این مثلث هستند. ارتفاع وارد از رأس B در نقطه D با AC برخورد می‌کند. نقطه‌ی X وسط کمان AH از دایره محیطی مثلث ADH است که شامل نقطه‌ی D می‌باشد. ثابت کنید $DX = DO$.

۳. به ازای کدام مقادیر صحیح $n > ۳$، یک nـ ضلعی محدب با این خاصیت وجود دارد که هر قطر آن عمود منصف حداقل یک قطر دیگر باشد؟

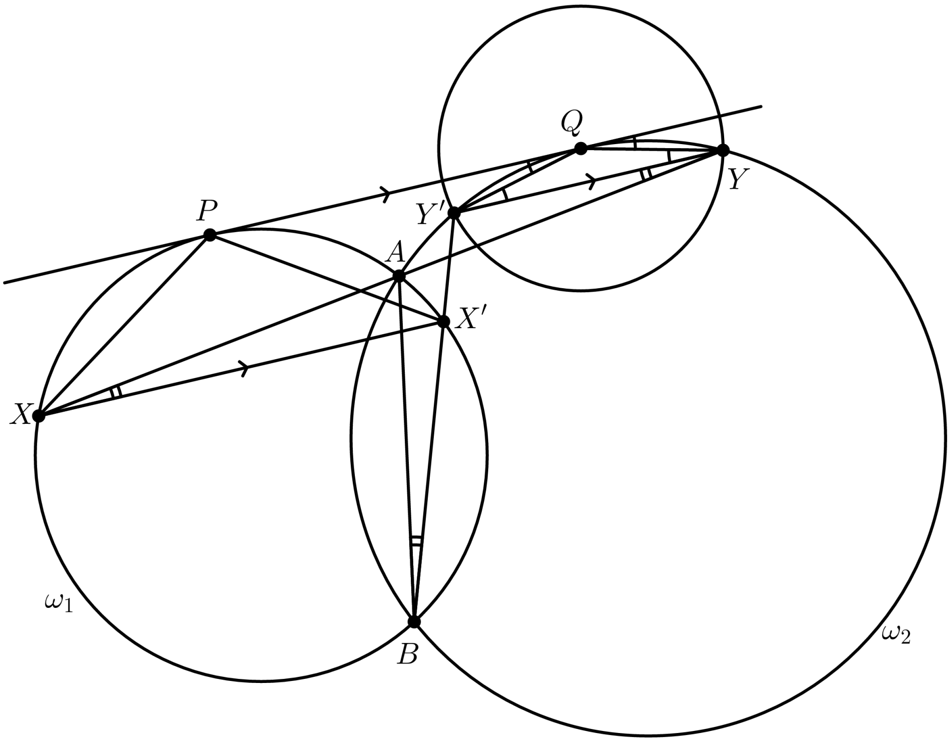
۴. $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است که قطرهای AC و BD آن بر هم عمود نیستند. نیمسازهای زاویه‌های بین این دو قطر، با پاره‌خط‌های AB, BC, CD و DA در نقاط K, L, M و N برخورد می کنند. اگر چهارضلعی $KLMN$ محاطی باشد، ثابت کنید $ABCD$ نیز محاطی است.

۵. $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی است. دایره‌ای از A, B می‌گذرد و به پاره‌خط CD در E مماس است. دایره‌ی دیگری از C, D می‌گذرد و به پاره‌خط AB در F مماس است. نقطه‌ی G محل برخورد AE و DF، و نقطه‌ی H محل برخورد BE و CF است. ثابت کنید مراکز دوایر محاطی داخلی مثلث‌های AGF, BHF, CHE و DGE روی یک دایره قرار دارند.

۱. دو دایره‌ی $\omega_۱, \omega_۲$ در نقاط A و B متقاطعند. PQ مماس مشترک خارجی این دو دایره است که $P \in \omega_۱$ و $Q \in \omega_۲$. نقطه‌ی X روی $\omega_۱$ به طور دلخواه اختیار شده است. خط AX برای بار دوم در Y با $\omega_۲$ برخورد می‌کند. نقطه $Y' \neq Y$ روی $\omega_۲$ طوری قرار دارد که $QY = QY'$. خط $Y'B$ برای بار دوم در X' با $\omega_۱$ برخورد می‌کند. ثابت کنید $PX = PX'$.

مرتضی ثقفیان

راه حل.



$QY = QY'$ نتیجه می‌دهد که $\angle QYY' = \angle QY'Y$. اکنون در دایره‌ی $\omega_۲$ داریم $\angle QYY' = \angle Y'QP$. این نتیجه می‌دهد $YY' \parallel PQ$.

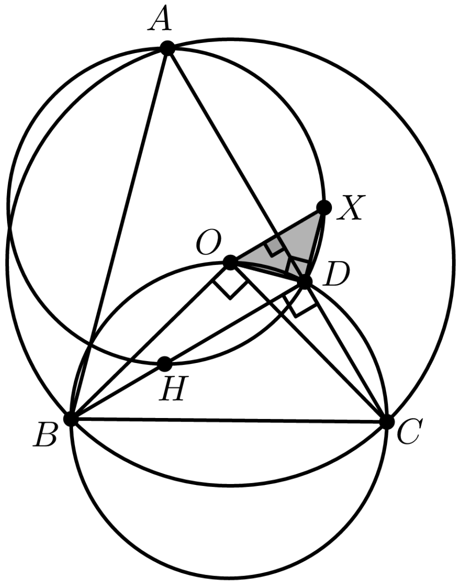
همچنین داریم $\angle Y'YA = \angle Y'BA$ و $\angle ABX' = \angle AXX'$. که یعنی $XX' \parallel YY' \parallel PQ$.

لذا $\angle PXX' = \angle X'PQ = \angle PX'X$، پس $PX = PX'$. ■

۲. در مثلث حاده‌ی ABC می‌دانیم $\angle A = ۴۵^\circ$. نقاط O و H به ترتیب مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز ارتفاعی این مثلث هستند. ارتفاع وارد از رأس B در نقطه D با AC برخورد می‌کند. نقطه‌ی X وسط کمان AH از دایره محیطی مثلث ADH است که شامل نقطه‌ی D می‌باشد. ثابت کنید $DX = DO$.

فاطمه سجادی

راه‌حل.



از آنجایی که $\angle AXH = ۹۰^\circ$ و $XA = XH$، می توان نتیجه گرفت که $\angle ADX = ۴۵^\circ = \angle AHX$.
همچنین $\angle BOC = ۲\angle A = ۹۰^\circ$، پس نقاط O, D روی دایره به قطر BC قرار دارند. این نتیجه می‌دهد

$$\widehat{ODA} = \widehat{OBC} = ۴۵^\circ \implies \widehat{ODX} = ۹۰^\circ.$$

ولی دقت کنید که

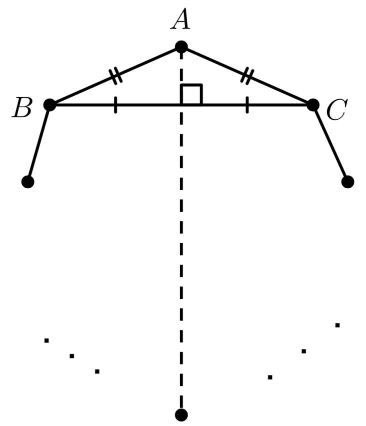
$$\widehat{ACH} = ۹۰^\circ - \widehat{A} = ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲}\widehat{AXH}.$$

این معادله به همراه $XA = XH$ نتیجه می‌دهد که X مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ACH است و لذا $XA = XC$. پس OX عمود منصف AC است، بنابراین $OX \perp AC$. اکنون در مثلث ODX نیمساز رأس D همان ارتفاع وارد شده از D می‌باشد، پس این مثلث یک مثلث متساوی‌الساقین است و $DX = DO$. ■

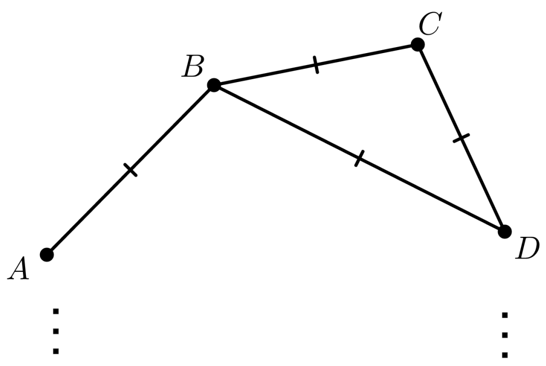
۳. به ازای کدام مقادیر صحیح $n > ۳$، یک nــ ضلعی محدب با این خاصیت وجود دارد که هر قطر آن عمود منصف حداقل یک قطر دیگر باشد؟

مهدی اعتصامی‌فرد

راه‌حل. فرض کنید m تعداد کل عمودمنصف‌های قطرهای nــ ضلعی داده‌شده باشد. فرض سؤال نتیجه می‌دهد که m از تعداد قطرها کمتر نیست. ولی روشن است که تعداد عمودمنصف‌های تعدادی پاره‌خط، از تعداد پاره‌خط‌ها تجاوز نمی‌کند! بنابراین نتیجه می‌گیریم که هر قطر عمودمنصف دقیقاً یک قطر دیگر می باشد. درضمن از آنجایی که عمودمنصف هر قطر یک خط یکتا است، نتیجه می‌گیریم برای هر قطر d، دقیقا یک قطر d' هست که d' عمودمنصف d باشد.
سه رأس مجاور B،A،C را از nــ ضلعی درنظر بگیرید که A بین C و B است. BC یک قطر از nــ ضلعی است، و تنها قطرهایی که شامل رأس A هستند، با BC تقاطع دارند؛ علی‌الخصوص قطری که عمودمنصف BC است باید شامل A باشد. پس $AB = AC$. با همین استدلال، نتیجه می‌شود که اضلاع این nــ ضلعی طول برابری دارند.



مانند قسمت قبل، چهار رأس مجاور از nــ ضلعی مانند A،B،C، D را در نظر بگیرید که با همین ترتیب قرار دارند. اگر $n > ۴$ باشد، AD یک قطر از nــ ضلعی خواهد بود. تنها قطرهایی که شامل B یا C هستند با AD برخورد دارند. پس مانند قسمت قبل، یا $BA = BD$ یا $CA = CD$. با توجه به این که $AB = BC = CD$، حالت اول نتیجه می‌دهد مثلث BCD متساوی‌الاضلاع بوده و $\angle BCD = ۶۰^\circ$. حالت دوم مشابهاً نتیجه می‌دهد که $\angle ABC = ۶۰^\circ$.



از این استدلال نتیجه می‌گیریم بین هر دو رأس از nــ ضلعی، حداقل یکی زاویه‌اش ۶۰ درجه است. پس در کل حداقل $\frac{n}{۲}$ از

زوایای nـضلعی ۶۰ درجه اند. ولی این نکته شناخته‌شده است که در هر nـضلعی که $n > ۳$، تعداد زوایای ۶۰ درجه حداکثر ۲ است. لذا باید داشته باشیم $\frac{n}{۲} \leq ۲$ که یعنی $n \leq ۴$. این نتیجه یک تناقض با فرض اولیه‌ی $n > ۴$ است. پس $n \leq ۴$.

به وضوح هر لوزی شرایط مطلوب مسأله را برقرار می‌کند. پس $\boxed{n = ۴}$ پاسخ مسأله است. ■

۴. $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است که قطرهای AC و BD آن بر هم عمود نیستند. نیمسازهای زاویه‌های بین این دو قطر، با پاره‌خط‌های AB, BC, CD و DA در نقاط K, L, M و N برخورد می کنند. اگر چهارضلعی $KLMN$ محاطی باشد، ثابت کنید $ABCD$ نیز محاطی است.

نیکلای بلوهوف (بلغارستان)

راه‌حل. فرض کنید P محل برخورد AC و BD باشد. در ابتدا ادعا می‌کنیم که KL و MN موازی نیستند. خلاف ادعا را فرض کنید، یعنی $KL \parallel MN$. از آنجایی که $KLMN$ محاطی است، داریم $KN = ML$، و $PK = PL,\ PM = PN$. همچنین داریم

$$\frac{KP}{PM} = \frac{PL}{PN}.$$

فرض کنید $AP = x, BP = y, CP = z$ و $DP = t$. همچنین فرض کنید $\angle APB = ۲\alpha$ و $\angle BPC = ۲\theta$. داریم

$$KP = \frac{xy}{x+y}\cos\alpha,\ PM = \frac{zt}{z+t}cos\alpha \implies \frac{KP}{PM} = \frac{\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}}{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}}.$$

مشابهاً،

$$\frac{PL}{PN} = \frac{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{t}}{\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}}.$$

از آنجایی که $\frac{KP}{PM} = \frac{PL}{PN}$، با مقداری محاسبات خواهیم داشت

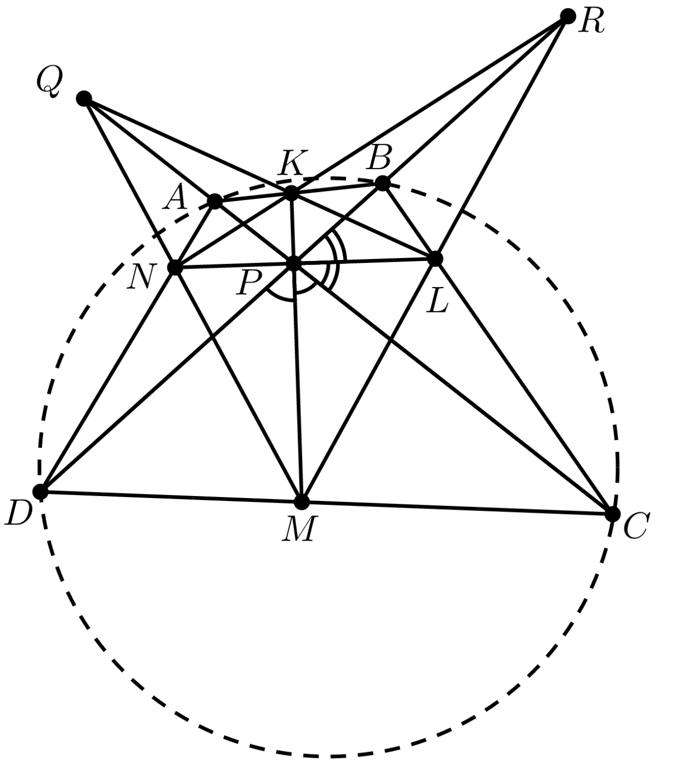
$$\frac{۱}{yz}+\frac{۱}{z^۲}+\frac{۱}{zt} = \frac{۱}{tx}+\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{xy} \implies \left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}\right)\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{t}\right) = ۰.$$

که یعنی $x = z$. ولی دقت کنید $PK = PL$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{xy}{x+y}\cos\alpha = \frac{yz}{y+z}\cos\theta.$$

اما $\theta = ۹۰^\circ - \alpha$، پس باید داشته باشیم $\alpha = \theta = ۴۵^\circ$ و لذا $AC \perp BD$، که در تضاد با صورت سؤال است. پس ادعا ثابت شد.

با استدلال مشابه نتیجه می‌گیریم KN و LM نیز موازی نیستند.



بر اساس قضیه‌ی منلائوس، KL و MN در یک نقطه مانند Q روی AC برخورد می‌کنند طوری که $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PC}$ و LM و NK در نقطه‌ی Rای روی BD برخورد می‌کنند که $\frac{BR}{RD} = \frac{BP}{PD}$. فرض کنید دایره‌ی محاطی داخلی ω از $ABCD$ اضلاعش را در K'، L'، M'، و N' قطع کند. بر اساس قضیه‌ی بریانشن، AL'، CK'، و BD همرس هستند. بر اساس قضایای سوا و منلائوس نیز، K'، L'، و Q هم‌خط هستند. متقارناً، M'، N'، و Q هم‌خط می‌باشند و $L'M'$ و $N'K'$ در R همرسند.

بر اساس قضیه‌ی بریانشن، $K'M'$ و $L'N'$ در P همرسند. این نتیجه می‌دهد قطرها و ضلع‌های مقابل هر دو چهارضلعی $KLMN$ و $K'L'M'N'$ در رئوس مثلث $\triangle PQR$ با هم برخورد می‌کنند. بنابراین، هم دایره‌ی محیطی $KLMN$ و ω و بر دایره‌ی قطبی $\triangle PQR$ منطبقند.

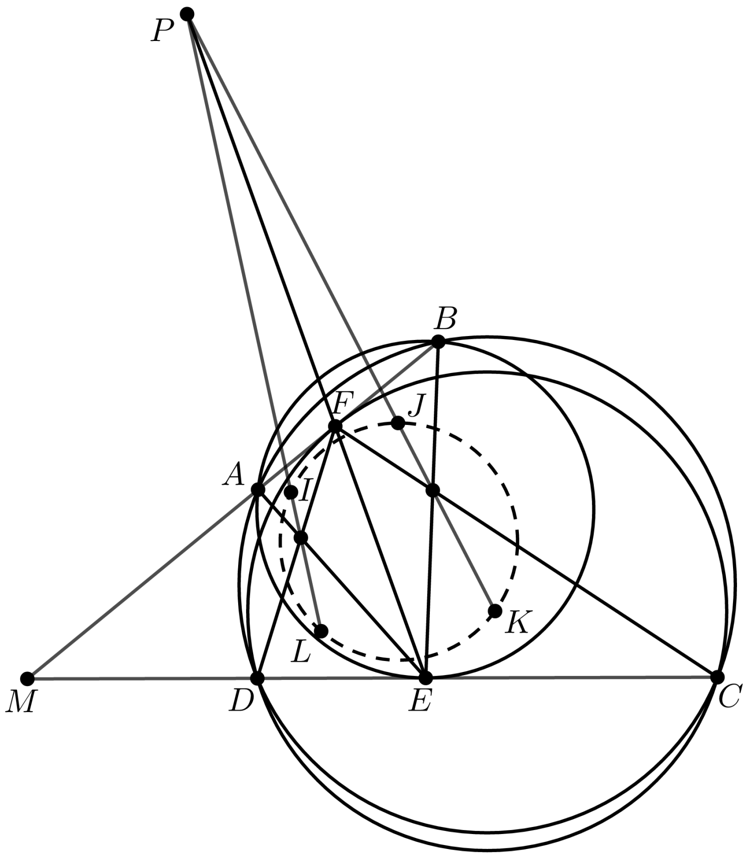
از آنجا که K نقطه‌ی مشترکی از AB و ω است، $K \equiv K'$. مشابهاً، $L \equiv L'$، $M \equiv M'$، و $N \equiv N'$. پس نیمساز زاویه‌ی KM از AC و BD طول برابری روی AB و CD جدا می‌کنند و $ABCD$ محاطی است، همانطور که می‌خواستیم.

■

۵. $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی است. دایره‌ای از A, B می‌گذرد و به پاره‌خط CD در E مماس است. دایره‌ی دیگری از C, D می‌گذرد و به پاره‌خط AB در F مماس است. نقطه‌ی G محل برخورد AE و DF، و نقطه‌ی H محل برخورد BE و CF است. ثابت کنید مراکز دوایر محاطی داخلی مثلث‌های AGF, BHF, CHE و DGE روی یک دایره قرار دارند.

ل ِ ویت آن (ویتنام)

راه‌حل.



فرض کنید I, J, K, L به ترتیب مراکز دایره محاطی داخلی مثلث‌های AGF, BHF, CHE, DGE باشند. فرض کنید ω دایره‌ی محیطی $ABCD$ باشد. در حالتی که $AB \parallel CD$، نتیجه خواهیم گرفت که $ABCD$ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است و می‌توان به سادگی دید که $IJKL$ نیز یک ذورنقه‌ی متساوی الساقین است.
پس فرض کنید $AB \not\parallel CD$ و M را محل برخورد نیم‌خط‌های BA و CD بگیرید. از آنجا که $ABCD$ محاطی است، این نتیجه حاصل می‌شود که

$$MA \cdot MB = MD \cdot MC = \mathcal{P}_M(\omega)$$

و چون ME به $\odot ABE$ مماس است، داریم

$$\widehat{MEA} = \widehat{MBE}.$$

همچنین داریم $ME^۲ = MA \cdot MB = \mathcal{P}_M(\odot ABE)$ و $MF^۲ = MD \cdot MC = \mathcal{P}_M(\odot CDF)$، که نتیجه می‌دهد

$ME = MF$، و بنابراین $\widehat{MEF} = \widehat{MFE}$. پس

$$\widehat{AEF} = \widehat{MEF} - \widehat{MEA} = \widehat{MFE} - \widehat{MBE} = \widehat{BEF}.$$

تساوی اخیر این معنی را می‌دهد که EF نیمساز داخلی $\angle AEB$ است. مشابهاً، FE نیمساز داخلی $\angle CFD$ است.
دقت کنید H, J, K هم‌خط هستند و $\angle FJH = ۹۰^\circ + \frac{\angle FBH}{۲}$. لذا

$$\begin{aligned}
\widehat{FJK} &= ۹۰^\circ + \frac{\widehat{MBE}}{۲} = ۹۰^\circ + \frac{\widehat{MEA}}{۲} \\
&= ۹۰^\circ + \frac{۱۸۰^\circ - \widehat{AEC}}{۲} = ۱۸۰^\circ - \frac{\widehat{AEC}}{۲} \\
&= ۱۸۰^\circ - \frac{\widehat{AEB} + \widehat{BEC}}{۲} = ۱۸۰^\circ - \left(\widehat{FEB} + \widehat{BEK}\right) \\
&= ۱۸۰^\circ - \widehat{FEK}
\end{aligned}$$

این یعنی $EFJK$ محاطی است. با استدلال مشابه، $EFIL$ نیز محاطی است.
از آنجا که EF نیمساز داخلی زاویه‌ی $\angle GEH$ و $\angle GFH$ است، می‌توان به سادگی دید که مثلث‌های GEF و HEF هم‌نهشت هستند. بنابراین $EG = EH$ و $FG = FH$، لذا $\frac{GE}{GF} = \frac{HE}{HF} = k$. سه خط را در نظر بگیرید، نیمساز خارجی رأس G در $\triangle GEF$، نیمساز خارجی رأس H در $\triangle HEF$ و خط EF. بر اساس معادله‌ی آخر، دو حالت داریم:

- این سه خط موازی اند. این یعنی $EFJK$ و $EFIL$ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین هستند. بنابراین پاره‌خط‌های EF، JK و IL عمودمنصف مشترکی دارند و $IJKL$ نیز یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است. □
- این سه خط در نقطه‌ای مانند P همرسند که $\frac{PE}{PF} = k$. اکنون به سادگی داریم

$$PJ \cdot PK = \mathcal{P}_P(\odot EFJK) = PE \cdot PF = \mathcal{P}_P(\odot EFIL) = PI \cdot PL.$$

که یعنی $IJKL$ محاطیست. □

■