بسمه تعالی

علیرضا شاولی
دانشجوی کارشناسی نرم افزار و ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

وقتی هندسه به یاری جبر می شتابد...

مقدمه

احتمالاً همه ی شما پیش از این، از ایده های جبری در اثبات مسائل هندسه استفاده کرده اید. بسیاری از قضایای هندسه را می توان به مسائل جبری معادل تبدیل کرد و با استفاده از ابزار گسترده ی موجود در جبر، آن ها را حل کرد. متغیر های جبری مسئله ی معادل می توانند از جنس طول، زاویه و ... باشند. از این جهت ترجمه ی اشیا و مفاهیم هندسی به اشیا و مفاهیم معادل جبری از اهمیت زیادی برخوردار است و از دیرباز مورد توجه بوده است. قضایایی که این چنین پل هایی را "از هندسه به جبر" می زنند سهم به سزایی در هندسه دارند. به عنوان مثال قضیه ی فیثاغورس از این نوع قضایا است. این قضیه، این مفهوم هندسی که یک مثلث با اضلاع a, b, c مثلثی قائم الزاویه با وتر c است را با این رابطه ی جبری که $a^2 + b^2 = c^2$ معادل می کند.

اجازه دهید که یک تبدیل(پل) قدرتمند تر و کلی تر از هندسه به جبر معرفی کنیم، که البته از پیش با آن آشنایید: دستگاه مختصات دکارتی. احتمالا می دانید که همه ی مفاهیم هندسه ی مسطحه مانند نقطه، خط راست، پاره خط، طول، دایره، تعامد و ... را می توان با کمک این دستگاه نمایش، به روابط جبری تبدیل کرد. به این ترتیب هر مسئله هندسه مسطحه معادل با یک مسئله ی جبری می شود. شاید به دلیل وجود چنین پل های قدرتمندی باشد که هندسه ی مسطحه عملاً جایی در ریاضیات عالی ندارد و بیشتر جنبه های آموزشی آن مورد توجه است.

چنین تبدیل هایی بین دو حوزه مختلف، در جاهای دیگری هم در ریاضیات ظاهر می شود. به عنوان نمونه نظریه ی گالوا یک تبدیل بین نظریه ی میدان ها و نظریه ی گروه ها برقرار می کند. اما این تبدیل ها عموماً دو طرفه هستند(گرچه معمولاً یک طرف پر کاربرد تر است). یعنی مثلاً به کمک تناظر گالوا، گاهی مسائل نظریه ی میدان ها را به مسائل نظریه گروه ها ترجمه کرده و حل می کنند و گاهی برعکس. در این نوشتار ما قرار است نشان دهیم، این پل های بین جبر و هندسه مسطحه نیز یک طرفه نیستند! یعنی هدف ما این است که مفاهیم جبری را به مفاهیم هندسه ترجمه کنیم و یک مسئله در جبر را با کمک ابزار هندسی حل کنیم. ادعای ما این نیست که این ترجمه ها همان قدر برای جبر سودمند است که ترجمه ی مفاهیم هندسی به جبری برای هندسه مفید است، با این حال ادعا می کنیم نمی توان به سادگی حکم کرد که قطعاً صورت جبری یک مسئله از صورت هندسی آن ساده تر است. تاکید ما بیشتر بر مسائلی است که از جنس مسائل مطرح شده در المپیاد ها و مسابقات ریاضی هستند.

یک دستگاه چغرِ بد بدن

برای ایجاد انگیزه در خوانندگان در همین ابتدا یکی از مسائل هیجان انگیز این مقاله را مطرح می کنیم. مستقیم سراغ صورت سوال می رویم:

مثال ۱. نشان دهید دستگاه
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=4\sqrt{3} \\ \sqrt{x^2-4}+\sqrt{z^2-4}=4\sqrt{3} \\ \sqrt{y^2-9}+\sqrt{z^2-9}=4\sqrt{3} \end{cases}$$
جوابی حقیقی دارد.

توصیه می کنیم پیش از خواندن راه حل این مثال سعی کنیم با عملیات های جبری دستگاه فوق را حل کنید.

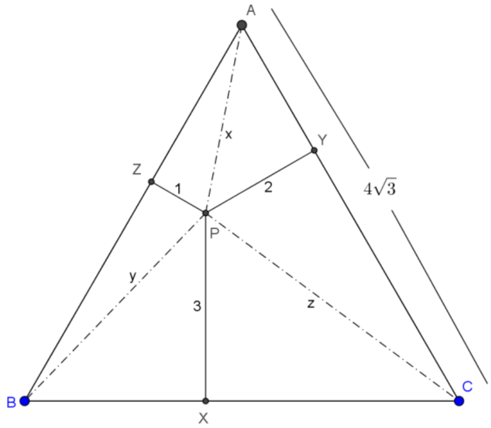
راه حل مثال ۱. اکنون که می دانید قرار است حلی هندسی برای این مسئله ارائه دهیم، باید بتوانید حدس بزنید عباراتی مثل $\sqrt{x^2-1}$ از کجا می آیند. بله، قضیه ی فیثاغورس. مثلثی به وتر x که یک ضلع آن ۱ است، طول ضلع دیگرش $\sqrt{x^2-1}$ است. مشابهاً $\sqrt{y^2-1}$ ضلع مثلث قائم الزاویه ای است که ضلع دیگرش ۱ و وترش y است. پیش از خواندن ادامه ی راه حل سعی کنید خودتان حل را کامل کنید.

برای حل این مسئله یک قضیه ی معروف هندسه را یادآوری می کنیم:

قضیه ۱. مجموع فواصل هر نقطه درون یک مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.

اثبات این قضیه را به خواننده واگذار می کنیم.

حال مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع $4\sqrt{3}$ به نام ABC در نظر بگیرید. خواننده می توان به سادگی تحقیق کند که طول ارتفاع آن 6 است. نقطه ای درون این مثلث مثل P در نظر بگیرید که فاصله اش از AB و AC به ترتیب 1 و 2 باشد(چرا چنین نقطه ای وجود دارد؟).



طبق قضیه ی ۱ فاصله ی این نقطه از ضلع BC برابر 3 خواهد بود. حال طول پاره خط های PA، PB و PC را به ترتیب x، y و z بنامید. تصویر P روی اضلاع BC، AC و AB را به ترتیب X، Y و Z بنامید. طبق قضیه ی فیثاغورس $AZ=\sqrt{x^2-1}$ و $BZ=\sqrt{y^2-1}$. لذا $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=4\sqrt{3}$. مشابهاً $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{z^2-4}=4\sqrt{3}$ و $\sqrt{y^2-9}+\sqrt{z^2-9}=4\sqrt{3}$. پس x,y,z در دستگاه مورد نظر مسئله صدق می کنند و لذا دستگاه جواب دارد. به سادگی می توان با کمی کار هندسی دیگر، مقادیر x,y,z را محاسبه کرد که این کار را به خواننده واگذار می کنیم. ■

پیش از ادامه ی بحث یک قضیه ی معروف در هندسه که به فرما منسوب است را با کمک قضیه ی ۱ ثابت می کنیم.

لم: درون مثلث ABC که هر سه زاویه ی آن از $120°$ کمتر هستند نقطه ای مانند F وجود دارد که

$$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120°$$

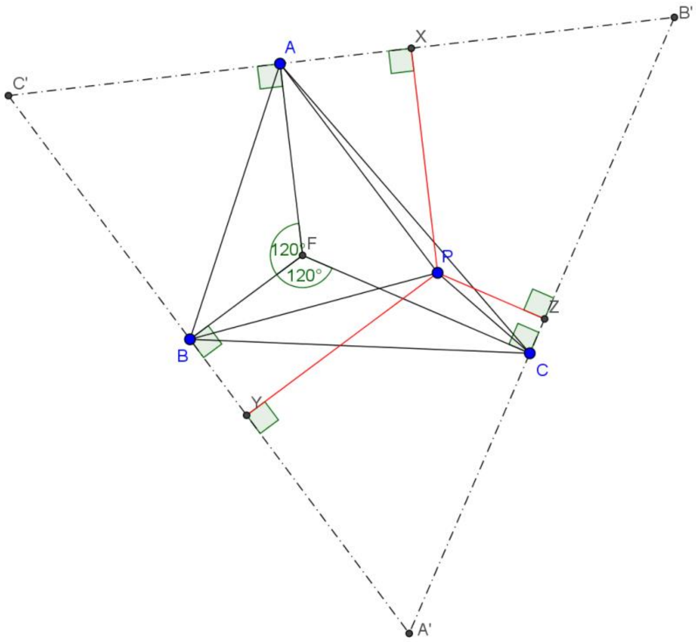
این نقطه را نقطه ی فرمای مثلث گویند.

اثبات این لم را به خواننده واگذار می کنیم.

قضیه ۲. مثلث ABC که همه ی زوایای آن از $120°$ کمترند مفروض است. در این صورت برای تمام نقاط درون صفحه مثل P، حاصل $PA+PB+PC$ وقتی که P نقطه ی فرما باشد، کمینه است.

اثبات قضیه ی ۲. به آسانی می توان فهمید نقطه ی مینیمم درون مثلث است(چرا؟). نقطه ی فرمای مثلث را F بنامید. کافیست برای هر نقطه ی P درون مثلث نشان دهیم $PA+PB+PC \geq FA+FB+FC$.

در نقاط A و B و C سه خط به ترتیب عمود بر FA و FB و FC رسم می کنیم تا مطابق شکل زیر از تلاقی آن ها مثلث $A'B'C'$ تشکیل می شود.



به روشنی مثلث $A'B'C'$ متساوی الاضلاع است. پای عمود وارد از P بر $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ را به ترتیب X، Y و Z بنامید. از آنجا که PXA مثلثی قائم الزاویه به وتر PA است، $PA \geq PX$. مشابهاً $PB \geq PY$ و $PC \geq PZ$. در نتیجه

$$PA+PB+PC \geq PX+PY+PZ$$

از طرفی طبق قضیه ۱ در مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ داریم $PX+PY+PZ = FA+FB+FC$. لذا

$$PA+PB+PC \geq FA+FB+FC$$

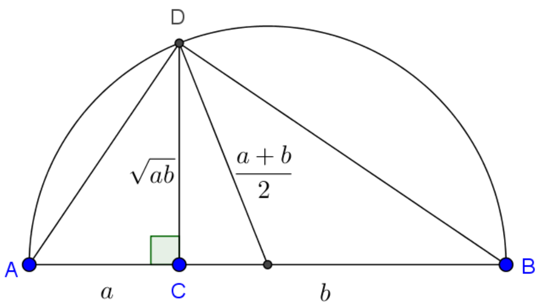
که همان چیزی است که میخواستیم ثابت کنیم. ■

هندسه به یاری نابرابری ها می شتابد

شاید اثبات هندسی زیر را برای نابرابری مشهور حسابی هندسی دیده باشید:

قضیه ۳. (نابرابری حسابی هندسی) برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

اثبات قضیه ۳. نیم دایره ای به شعاع $\frac{a+b}{2}$ در نظر می گیریم. سپس روی قطر آن، مطابق شکل روبرو پاره خط هایی به طول a و b جدا می کنیم. در نقطه ی C عمودی از قطر خارج می کنیم تا نیم دایره را در D قطع کند. اگر O مرکز نیم دایره باشد، در مثلث قائم الزاویه ی DCO وتر برابر $\frac{a+b}{2}$ و ضلع DC برابر $\sqrt{ab}$ است(چرا؟). بنابراین $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. ■

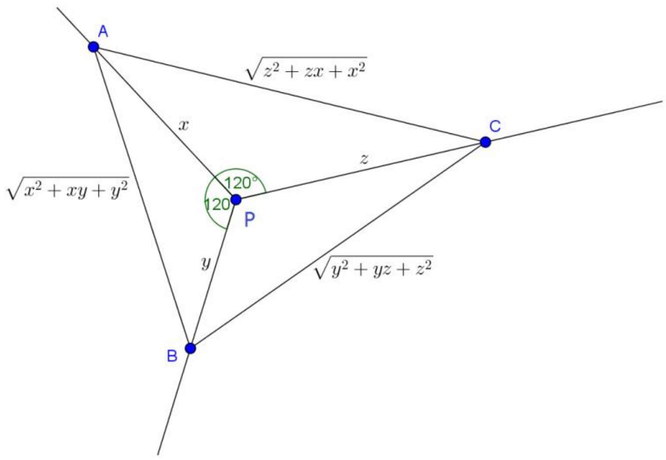


نابرابری حسابی هندسی، یکی از پایه ای ترین و مهم ترین نابرابری ها، به خصوص در مسائلی که در مسابقات ریاضی مطرح می شوند، می باشد. وقتی چنین اثبات هندسی برای این نابرابری وجود دارد، جای تعجب نخواهد داشت که بتوان نابرابری های پیچیده تری را نیز با تکنیک های هندسی حل کرد. در این بخش چند نمونه خواهیم آورد.

مثال ۲. برای هر سه عدد حقیقی مثبت x, y, z ثابت کنید

$$\sqrt{3(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)} \geq (x+y+z)(xy+yz+zx)$$

راه حل مثال ۲. وجود عبارت x^2+xy+y^2 ما را به سمت استفاده از قضیه ی کسینوس ها رهنمون می شود. مثلثی با دو ضلع x و y که زاویه ی بینشان $120°$ است ضلع دیگرش $\sqrt{x^2+xy+y^2}$ است. نقطه ی P را در صفحه در نظر بگیرید. سه نیم خط از آن خارج کنید که با هم زوایای $120°$ بسازند. سپس پاره خط هایی به طول های x, y, z روی آن ها جدا کنید و مطابق شکل سه سر دیگر پاره خط ها(بجز P) را A, B, C بنامید.



فرض کنید $BC=a, AC=b, AB=c$. پس طبق قضیه کسینوس ها $c=\sqrt{x^2+xy+y^2}$، $a=\sqrt{y^2+yz+z^2}$ و $b=\sqrt{z^2+zx+x^2}$. حال دقت کنید S، مساحت مثلث ABC، برابر جمع مساحت مثلث های ABP، BPC و CPA است. پس

$$S=\frac{1}{2}xy\times\sin(120°)+\frac{1}{2}yz\times\sin(120°)+\frac{1}{2}zx\times\sin(120°)=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$$

پس نابرابری صورت مسئله را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد

$$\sqrt{3}abc \geq (x+y+z)\times\frac{4}{\sqrt{3}}S$$

از طرفی می دانیم در هر مثلث $R=\frac{abc}{4S}$ که R شعاع دایره محیطی است. پس نابرابری به $3R \geq x+y+z$ تبدیل می شود. اثبات این نابرابری نیز با توجه به قضیه ۲ آسان است. زیرا P نقطه فرمای مثلث ABC است و لذا اگر O مرکز دایره محیطی باشد خواهیم داشت:

$$x+y+z=PA+PB+PC\leq OA+OB+OC=3R$$

لذا حکم ثابت می شود. ■

Iranian Geometry Olympiad

در برخی سوالاتی که از مبحث نابرابری ها در مسابقات ریاضی مطرح می شوند، در صورت سوال ذکر می شود که متغیر ها اضلاع یک مثلث هستند. به معنی جبری یعنی جمع هر دوتایی از سومی بزرگ تر است. اما بهتر است در این سوالات همیشه به این نکته هم توجه داشته باشید، که شاید بتوان به نامساوی یک معنی هندسی خوب بخشید و آن را با تکنیک های هندسی حل کرد.

مثال ۳. a, b, c اضلاع یک مثلث حاده الزاویه هستند. ثابت کنید

$$a+b+c \geq \sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2-a^2}+\sqrt{c^2+a^2-b^2}$$

راه حل مثال ۳. مثلث را ABC بنامید. پای عمود A بر BC را A' می نامیم. نقاط B', C' بطور مشابه تعریف می شوند. فرض کنید $x = BA'$ و $x' = CA'$. مشابهاً $y = CB'$ و $y' = B'A$ و $z = AC'$ و $z' = C'B$. بدون کاستن از کلیت راه حل فرض می کنیم $x+y+z \leq x'+y'+z'$. با استفاده از قضیه ی فیثاغورس و کمی محاسبه خواهیم داشت $x = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$، $y = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$ و $z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2c}$. پس مسئله به نامساوی زیر تبدیل می شود

$$a+b+c \geq \sqrt{2ax}+\sqrt{2by}+\sqrt{2cz}$$

حال طبق نابرابری کوشی شوارتز داریم $(a+b+c)(2x+2y+2z) \geq \left(\sqrt{2ax}+\sqrt{2by}+\sqrt{2cz}\right)^2$. از طرفی چون فرض کردیم $x+y+z \leq x'+y'+z'$ پس $a+b+c \geq 2(x+y+z)$ پس

$$(a+b+c)^2 \geq (a+b+c)(2x+2y+2z) \geq \left(\sqrt{2ax}+\sqrt{2by}+\sqrt{2cz}\right)^2$$

که به وضوح حکم را نتیجه می دهد. ■

دسته ی بزرگی از مسائل نابرابری که در مسابقات ریاضی مطرح می شوند، نابرابری های سه متغیره هستند. در چنین مسائلی اگر برخلاف مثال ۳ اشاره نشده باشد که متغیر ها اضلاع مثلث هستند و یا بر خلاف مثال ۲ نشانه هایی که ما را به مفاهیم هندسی رهنمون کند وجود نداشته باشد، در نگاه اول نمی توان مسئله را به مسئله ای هندسی تبدیل کرد. اما تغییر متغیر مفیدی وجود دارد که این کار را برای ما انجام می دهد. از این پس اضلاع یک مثلث را با a, b, c و نصف محیط آن را با p نمایش می دهیم. فرض کنید x, y, z سه عدد حقیقی مثبت باشند. در این صورت $c = x+y$، $b = x+z$ و $a = y+z$ اضلاع یک مثلث هستند(چرا؟). این تغییر متغیر می تواند به ما امکان دهد مسئله را از دیدگاه هندسی بررسی کنیم. دقت کنید $x = p-a$، $y = p-b$ و $z = p-c$.

مثال ۴. برای اعداد حقیقی مثبت x, y, z ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

راه حل مثال ۴. از تغییر متغیر معرفی شده استفاده می کنیم:

$$\sqrt{\frac{p-a}{c}}+\sqrt{\frac{p-b}{a}}+\sqrt{\frac{p-c}{b}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

لم: در مثلث ABC با اضلاع a, b, c داریم $\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

اثبات این لم را به خواننده واگذار می کنیم.

با استفاده از لم فوق مسئله به این صورت بازنویسی می شود:

$$\sqrt{b}\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)+\sqrt{c}\cos\left(\frac{\angle B}{2}\right)+\sqrt{a}\cos\left(\frac{\angle C}{2}\right)\le\frac{3\sqrt{p}}{\sqrt{2}}$$

حال طبق نابرابری کوشی شوارتز:

$$\left(\sqrt{b}\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)+\sqrt{c}\cos\left(\frac{\angle B}{2}\right)+\sqrt{a}\cos\left(\frac{\angle C}{2}\right)\right)^2\le(b+c+a)\left(cos^2\left(\frac{\angle A}{2}\right)+cos^2\left(\frac{\angle B}{2}\right)+cos^2\left(\frac{\angle C}{2}\right)\right)$$

و چون $a+b+c=2p$ لذا کافیست ثابت کنیم

$$cos^2\left(\frac{\angle A}{2}\right)+cos^2\left(\frac{\angle B}{2}\right)+cos^2\left(\frac{\angle C}{2}\right)\le\frac{9}{4}$$

از طرف دیگر $\frac{\cos(x)+1}{2}=cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ لذا باید ثابت کنیم

$$\cos(\angle A)+\cos(\angle B)+\cos(\angle C)\le\frac{3}{2}$$

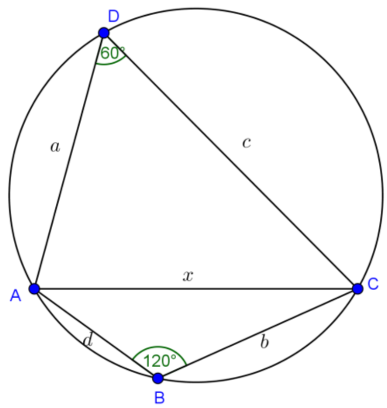
که یک نابرابری بسیار مشهور است. ■

حسن ختام

مسئله ی زیر مسئله ی ششم(سخت ترین مسئله) از المپیاد بین المللی ریاضی سال ۲۰۰۱ می باشد. راه حل سوال برای کسی که اولین بار با آن مواجه می شود کاملاً غافلگیر کننده است.

مثال ۵. $a>b>c>d$ اعداد طبیعی هستند و داریم $ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$. ثابت کنید $ab+cd$ عددی مرکب است.

راه حل مثال ۵. پس از باز کردن سمت راست فرض مسئله و ساده سازی به رابطه ی معادل $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2$ خواهیم رسید. دقت کنید طبق قضیه ی کسینوس ها اگر $a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2=x^2$ در این صورت x طول ضلع مثلثی به اضلاع a و c خواهد بود که زاویه بینشان $60°$ است و نیز طول ضلع مثلثی به اضلاع b و d که زاویه بینشان $120°$ است. این دو مثلث را از روی ضلع x مطابق شکل زیر به هم می چسبانیم. دقت کنید چهارضلعی حاصل محاطی است.



پیش از ادامه ی راه حل یک قضیه ی مشهور دیگر در هندسه را یادآوری می کنیم.

قضیه ۴. (نابرابری بطلمیوس) در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم $AB \times CD + AD \times BC \geq AC \times BD$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر چهارضلعی محاطی باشد.

خواننده برای مشاهده ی اثبات این قضیه می تواند به منبع [3] مراجعه کند.

به مسئله ی اصلی بازمی گردیم. فرض کنید $\angle BCD = \alpha$ و $BD = y$. طبق قضیه بطلمیوس چون چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، $xy = ab + cd$. به علاوه طبق قضیه ی سینوس ها $\frac{x}{y} = \frac{\sin(60)}{\sin(\alpha)}$. از طرف دیگر اگر S مساحت چهارضلعی باشد می توان یک بار آن را به جمع مساحت های ACD و ACB و بار دیگر جمع مساحت های BAD و BCD نوشت. پس

$$S = \frac{1}{2}ac \times \sin(60) + \frac{1}{2}bd \times \sin(120) = \frac{1}{2}(ac + bd)\sin(60)$$

$$S = \frac{1}{2}ad \times \sin(\alpha) + \frac{1}{2}bc \times \sin(\alpha) = \frac{1}{2}(ad + bc)\sin(\alpha)$$

پس $\frac{ad+bc}{ac+bd} = \frac{\sin(60)}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{y}$. ازسوی دیگر می دانستیم $xy = ab + cd$. با ضرب کردن این دو رابطه

$$x^2 = \frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}$$

پس $x^2(ac + bd) = (ad + bc)(ab + cd)$ و لذا $(a^2 - ac + c^2)(ac + bd) = (ad + bc)(ab + cd)$. حال اگر $ab + cd$ اول باشد داریم $ab + cd|ac + bd$ یا $ab + cd|a^2 - ac + c^2$. اما $ab + cd > ac + bd$ زیرا $(a - d)(b - c) > 0$. پس $ab + cd|a^2 - ac + c^2$ و لذا $ac + bd|ad + bc$ اما $ac + bd > ad + bc$ زیرا $(a - b)(c - d) > 0$. تناقض حاصل نشان می دهد $ab + cd$ مرکب است. ■

تمرین ها

تمرین ۱. یک زاویه ی مثلثی از $120°$ بیشتر است. نقطه ی P را در صفحه بیابید که جمع فواصلش از رئوس مثلث کمینه شود.

تمرین ۲. نشان دهید با فرض مثبت بودن x, y, z جواب مثال ۱، یکتاست.

تمرین ۳. برای هر سه عدد حقیقی مثبت x, y, z ثابت کنید $\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} \geq \sqrt{x^2 + xz + z^2}$ و تعیین کنید که حالت تساوی چه زمانی رخ می دهد.

تمرین ۴. (المپیاد بین المللی ریاضی ۲۰۰۰) برای سه عدد حقیقی مثبت a, b, c داریم $abc = 1$. ثابت کنید

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

تمرین ۵. (مجله ی ریاضی CRUX) برای اعداد مثبت x, y, z ثابت کنید:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq 3\sqrt{xy + yz + zx}.$$

تمرین ۶. (حالت سه تایی نابرابری حسابی هندسی) برای هر سه عدد حقیقی مثبت a, b, c ثابت کنید $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

تمرین ۷. بزرگ ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x, y: $\sqrt{y^2 + (x - 1)^2} + \sqrt{y^2 + (x + 1)^2} \geq \sqrt{x^2 + (y + k)^2}$

راهنمایی تمرین ها

راهنمایی تمرین ۱. پاسخ همان راسی است که زاویه اش از $120°$ بیشتر است.

راهنمایی تمرین ۲. سعی کنید استدلالی هندسه ارائه دهید.

راهنمایی تمرین ۳. از قضیه کسینوس ها استفاده کنید. نابرابری مطرح شده به نابرابری مثلث تبدیل می شود.

راهنمایی تمرین ۴. ابتدا با تغییر متغیر $a=\frac{x}{y}$، $b=\frac{y}{z}$ و $c=\frac{z}{x}$ نامساوی را همگن کنید. سپس از تغییر متغیر $x=p-a$، $y=p-b$ و $z=p-c$ که در مثال ۴ معرفی کردیم استفاده کنید. نامساوی نهایتاً به نامساوی $R\geq 2r$ در مثلث تبدیل می شود که نامساوی مشهوری در مثلث است و به نامساوی اویلر معروف است.(R و r شعاع دوایر محیطی و محاطی داخلی اند)

راهنمایی تمرین ۵. از ایده ی مثال ۲ استفاده کنید.

راهنمایی تمرین ۶. از تغییر متغیر $a=p-a$، $b=p-b$ و $c=p-c$ استفاده کنید.

راهنمایی تمرین ۷. از دستگاه مختصات دکارتی و نامساوی بطلمیوس(قضیه ۴) استفاده کنید. پاسخ سوال $\sqrt{3}$ است.

منابع و مراجع

[1] احسان ممتحن، نتایج باورنکردنی در ریاضیات: گزیده ی مقالات و گفت و گو های همگانی دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز (۱۳۸۱)

[2] ساناز فتوحی، مسائل هندسه در المپیاد های داخلی و خارجی، انتشارات مبتکران (۱۳۸۳)

[3] سیامک احمد پور، مصطفی مسگری مشهدی، هندسه ی مسطحه از مقدمات تا المپیاد، انتشارات خوشخوان (۱۳۸۷)

[4] مهدی صفا، مباحث و مسائل جبر در المپیاد ریاضی، انتشارات خوشخوان (۱۳۸۵)

[5] S. Klamkin, Problem 1394, Crux Mathematicorum, December 1988, Volume 14, number 10