دفترچه سوالات چهارمین المپیاد هندسه ایران

۱۶ تا ۱۸ شهریور ۱۳۹۶

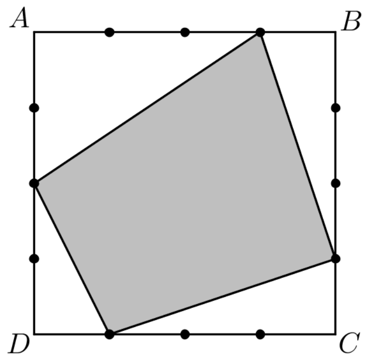
این دفترچه توسط آقایان هیراد عالی پناه و ایمان مقصودی با همکاری آقایان مرتضی ثقفیان، هومن فتاحی مقدم، داوود وکیلی، مهدی اعتصامی فرد، امیررضا احمدزاده و سیامک احمدپور تهیه شده است.

Fatemi
Cultural
Institute

با تشکر ویژه از انتشارات فاطمی، دانشگاه صنعتی شریف، دبیرستان علامه حلی تهران و دبیرستان فرزانگان ۱ تهران که ما را برای برگزاری المپیاد هندسه در ایران یاری نمودند.

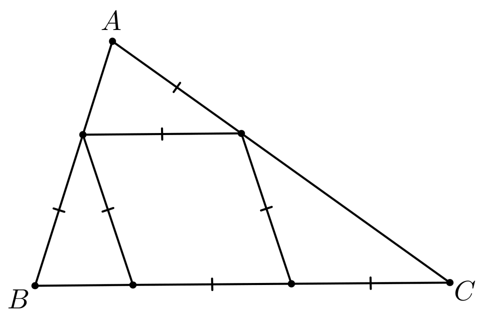
آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱. هر یک از اضلاع مربع $ABCD$ به ضلع ۴ را به کمک سه نقطه به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. در هر مرحله از هر یک از اضلاع یکی از سه نقطه را انتخاب می‌کنیم و نقاط را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم تا یک چهارضلعی ایجاد شود. مساحت چهارضلعی حاصل چه اعدادی می‌تواند باشد؟ فقط اعداد را بنویسید. اثبات لازم نیست.



هیراد عالی پناه

۲.در شکل زیر زاویه‌های مثلث ABC را بیابید.



مرتضی ثقفیان

۳. در پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ از C بر ضلع CD عمود می‌کنیم تا ضلع AB را در F قطع کند. ثابت کنید $AE + AF = BE$.

علیرضا چراغی

۴. صد نقطه $P_۱, P_۲, ..., P_{۱۰۰}$ در صفحه داریم که هیچ سه تایی از این نقاط هم‌خط نیستند. برای هر سه نقطه از این صد نقطه، اگر ترتیب صعودی اعداد این سه نقطه ساعتگرد باشند آن‌ها را یک مثلث ساعتگرد می‌نامیم. آیا ممکن است که تعداد مثلث‌های ساعتگرد دقیقاً ۲۰۱۷ باشد؟

مرتضی ثقفیان

۵. در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ از رأس A خط l را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. نقطه D را بر روی خط l به دلخواه در نظر می‌گیریم. پای عمودهای وارد از A بر BD و CD را به ترتیب E و F و پای عمودهای وارد از E و F بر l را به ترتیب P و Q می‌نامیم. ثابت کنید $AP + AQ \leq AB$.

مرتضی ثقفیان

آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱. در مثلث حاده الزاویه ABC زاویه A برابر با ۶۰ درجه است. پای عمود وارد از B بر AC را E و پای عمود وارد از C بر AB را F می‌نامیم. ثابت کنید $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

فاطمه سجادی

۲. دو دایره ω_1 و ω_2 در نقاط A و B متقاطعند. خط دلخواهی از B می‌گذرانیم تا ω_1 را در C و ω_2 را در D قطع کند. نقاط E و F به ترتیب روی ω_1 و ω_2 به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $CE = CB$ و $BD = DF$. فرض کنید BF دایره ω_1 را در P و BE دایره ω_2 را در Q قطع کند. ثابت کنید A و P و Q هم‌خطند.

ایمان مقصودی

۳. n نقطه ($n > 2$) در صفحه داده شده است که هیچ سه تایی از این نقاط هم‌خط نیستند. به ازای هر دو نقطه، خط واصل بین این نقاط را رسم می‌کنیم و نزدیکترین نقطه از بین بقیه نقاط به این خط را علامت می‌زنیم (فرض کنید در هر مورد این نقطه یکتا بوده است). حداکثر چند نقطه علامت می‌خورد؟

بوریس فرنکین (روسیه)

۴. در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) از رأس A خط l را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. نقطه D را بر روی خط l به دلخواه در نظر می‌گیریم. پای عمودهای وارد از A بر BD و CD را به ترتیب E و F و پای عمودهای وارد از E و F بر l را به ترتیب P و Q می‌نامیم. ثابت کنید $AP + AQ \leq AB$.

مرتضی ثقفیان

۵. در مثلث ABC نقاط X و Y را روی ضلع BC طوری در نظر می‌گیریم که $2XY = BC$. فرض کنید AA' قطر دایره محیطی مثلث AXY باشد. فرض کنید AX و عمود وارد از B بر BC یکدیگر را در P، و AY و عمود وارد از C بر BC یکدیگر را در Q قطع می‌کنند. ثابت کنید مماس در A' بر دایره محیطی مثلث AXY از مرکز دایره محیطی مثلث APQ عبور می‌کند.

ایمان مقصودی

آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

۱. در مثلث ABC، محل برخورد نیمسازها را I و محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC را D می‌نامیم. فرض کنید DI ضلع AC را در X قطع کند. مماس وارد از X بر دایره محاطی ضلع AB را در Y قطع می‌کند. اگر محل برخورد YI و BC را Z بنامیم ثابت کنید $AB = BZ$.

هومن فتاحی مقدم

۲. شش دایره دوبدو غیرمتقاطع داریم که شعاع هریک از آنها حداقل واحد است. ثابت کنید هر دایره که هر شش دایره را قطع کند شعاعش حداقل واحد است.

محمدعلی آبام – مرتضی ثقفیان

۳. در مثلث ABC فرض کنید O مرکز دایره محیطی باشد. خط CO ارتفاع وارد از A بر ضلع BC را در K قطع می‌کند. وسط AK را P و وسط AC را M در نظر بگیرید. اگر PO ضلع BC را در Y و دایره محیطی مثلث BCM ضلع AB را در X قطع کند ثابت کنید چهارضلعی $BXOY$ محاطی است.

علی دایی نبی – حمید پردازی

۴. بر خط l، سه دایره ω_1، ω_2 و ω_3 را به ترتیب در نقاط A، B و C به گونه‌ای مماس می‌کنیم که ω_2 بر دو دایره دیگر مماس خارج باشد (هر سه دایره در یک طرف l قرار دارند و B بین A و C قرار دارد). اگر مماس مشترک ω_1 و ω_3 دایره ω_2 را در X و Y، و عمود وارد از B بر l دایره ω_2 را در Z قطع کند، ثابت کنید دایره به قطر AC بر ZX و ZY مماس است.

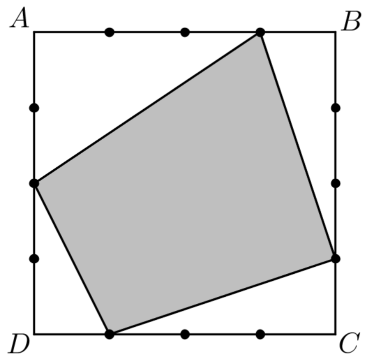
ایمان مقصودی – سیامک احمدپور

۵. فرض کنید A و B و C و D چهار نقطه بر روی یک صفحه باشند و S کره‌ای باشد که بر این صفحه مماس است. نقطه A' را به صورتی در نظر می‌گیریم که S به وجوه چهاروجهی $A'BCD$ مماس شود. نقاط B' و C' و D' نیز به صورت مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید نقاط A' و B' و C' و D' بر روی صفحه‌ای قرار دارند که بر کره S مماس است.

الکسی زاسلاوسکی (روسیه)

پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح مقدماتی)

۱. هر یک از اضلاع مربع $ABCD$ به ضلع ۴ را به کمک سه نقطه به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. در هر مرحله از هر یک از اضلاع یکی از سه نقطه را انتخاب می‌کنیم و نقاط را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم تا یک چهارضلعی ایجاد شود. مساحت چهارضلعی حاصل چه اعدادی می‌تواند باشد؟ فقط اعداد را بنویسید. اثبات لازم نیست.



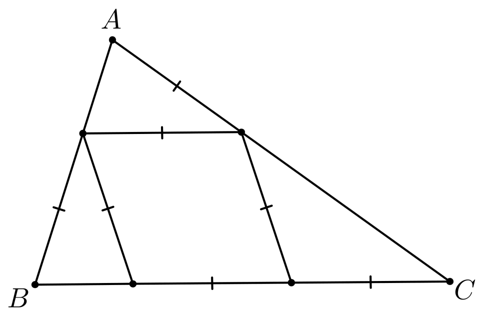
هیراد عالی پناه

راه حل.

کافی است مساحت چهار مثلث سفید را محاسبه کنیم و عدد حاصل را از ۱۶ کم کنیم. هفت جواب برای مساحت چهارضلعی به دست می آید:

۶, ۷, ۷/۵, ۸, ۸/۵, ۹, ۱۰

۲.در شکل زیر زاویه‌های مثلث ABC را بیابید.

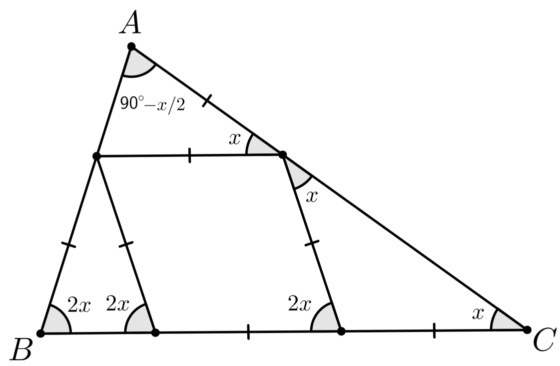


مرتضی ثقفیان

راه حل.
زاویه $\angle BCA$ را برابر با x در نظر بگیرید. می دانیم که چهارضلعی ای که اضلاعش با هم برابر باشند یک لوزی است و در نتیجه اضلاع موازی دارد. پس بنابر محاسبات درون شکل داریم:

$$\angle A+\angle B+\angle C=۱۸۰^\circ \rightarrow ۹۰-\frac{x}{۲}+۲x+x=۱۸۰^\circ \rightarrow \frac{۵x}{۲}=۹۰^\circ \rightarrow x=۳۶^\circ$$

$$\rightarrow \angle A=۷۲^\circ, \angle B=۷۲^\circ, \angle C=۳۶^\circ$$



۳. در پنج ضلعی منتظم $ABCDE$ از C بر ضلع CD عمود می‌کنیم تا ضلع AB را در F قطع کند. ثابت کنید $AE + AF = BE$.

علیرضا چراغی

−−

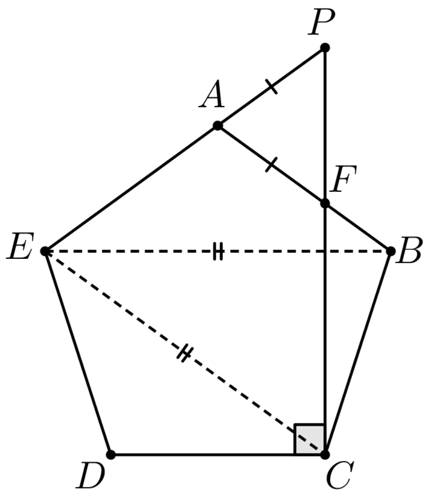
راه حل.
فرض کنید CF امتداد ضلع AE را در P قطع کند. از آنجایی که در پنج ضلعی منتظم تمامی زوایا برابر با ۱۰۸ درجه هستند، داریم:

$$\angle CFB = ۱۸۰^\circ - \angle FBC - \angle BCF = ۱۸۰^\circ - ۱۰۸^\circ - ۱۸^\circ = ۵۴^\circ$$

$$\rightarrow \angle APF = \angle EAB - \angle AFP = ۱۰۸^\circ - ۵۴^\circ = ۵۴^\circ \rightarrow AF = AP$$

از طرفی در پنج ضلعی منتظم، قطرها زاویه ها را به سه قسمت مساوی ۳۶ درجه تقسیم می کنند. همچنین از آنجا که چهارضلعی $DEBC$ ذوزنقه است BE با CD موازی است. پس داریم:

$$\angle BEP = \angle BEC, EB \perp CP \rightarrow CE = EP \rightarrow AE+AP = CE = BE \rightarrow AE+AF = BE$$



۴. صد نقطه $P_{۱}, P_{۲}, \ldots, P_{۱۰۰}$ در صفحه داریم که هیچ سه تایی از این نقاط هم‌خط نیستند. برای هر سه نقطه از این صد نقطه، اگر ترتیب صعودی اعداد این سه نقطه ساعتگرد باشند آن‌ها را یک مثلث ساعتگرد می‌نامیم. آیا ممکن است که تعداد مثلث‌های ساعتگرد دقیقاً ۲۰۱۷ باشد؟

مرتضی ثقفیان

— —

راه حل.
در ابتدا فرض کنید $P_{۱}, P_{۲}, \ldots, P_{۱۰۰}$ به ترتیب پادساعتگرد روی یک دایره باشند. در این حالت تعداد مثلث های ساعتگرد صفر است.

حال شروع به حرکت دادن نقاط می کنیم، هربار یک نقطه مثل P_i از خط P_jP_k عبور کند وضعیت ساعتگرد بودن مثلث $P_iP_jP_k$ تغییر می کند و وضعیت سایر مثلث ها تغییر نمی کند (فرض کنید نقاط طوری حرکت کنند که در یک لحظه یک نقطه همزمان از دو خط عبور نمی کند). بنابراین تعداد مثلث های ساعتگرد دقیقاً یک واحد تغییر می کند. فرض کنید نقاط را حرکت دهیم تا در نهایت به ترتیب ساعتگرد روی دایره قرار گیرند. در این حالت تعداد مثلث های ساعتگرد برابر با $\binom{۱۰۰}{۳}$ است که از ۲۰۱۷ بیشتر است، و در طول حرکت یکی یکی تغییر کرده است. پس در لحظه ای تعداد مثلث های ساعتگرد دقیقاً ۲۰۱۷ بوده است.

۵. در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ از رأس A خط l را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. نقطه D را بر روی خط l به دلخواه در نظر می‌گیریم. پای عمودهای وارد از A بر BD و CD را به ترتیب E و F و پای عمودهای وارد از E و F بر l را به ترتیب P و Q می‌نامیم. ثابت کنید $AP + AQ \leq AB$.

مرتضی ثقفیان

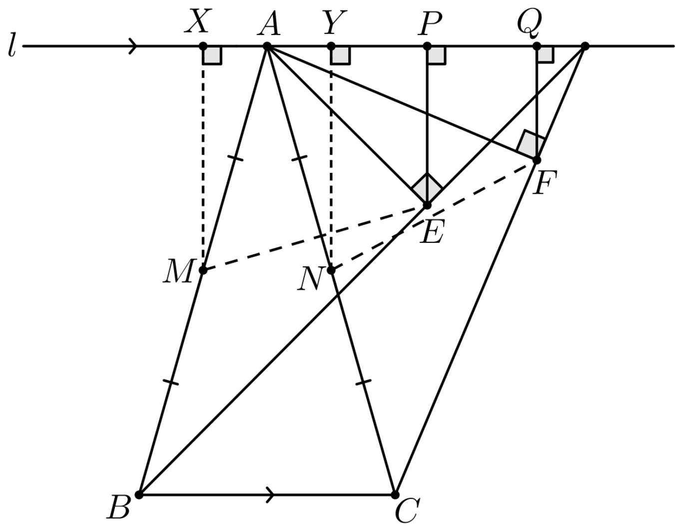
راه حل.

فرض کنید M و N به ترتیب اوساط اضلاع AB و AC باشند. پای عمودهای M و N را بر l به ترتیب X و Y می‌نامیم. از آنجایی که l موازی BC است پس $AX = AY$. از طرفی می دانیم طول تصویر هر پاره خط روی یک خط از طول آن پاره خط بیشتر نیست. پس داریم:

$$\frac{AB}{۲} = AM = ME \geq XP = AP + AX$$

$$\frac{AC}{۲} = AN = NF \geq YQ = AQ - AY$$

$$\rightarrow AB \geq XP + YQ = AP + AQ + AX - AY \rightarrow AB \geq AP + AQ$$



پاسخ آزمون المپیاد هندسه (سطح متوسط)

۱. در مثلث حاده الزاویه ABC زاویه A برابر با ۶۰ درجه است. پای عمود وارد از B بر AC را E و پای عمود وارد از C بر AB را F می‌نامیم. ثابت کنید $CE - BF = \frac{۳}{۲}(AC - AB)$.

فاطمه سجادی

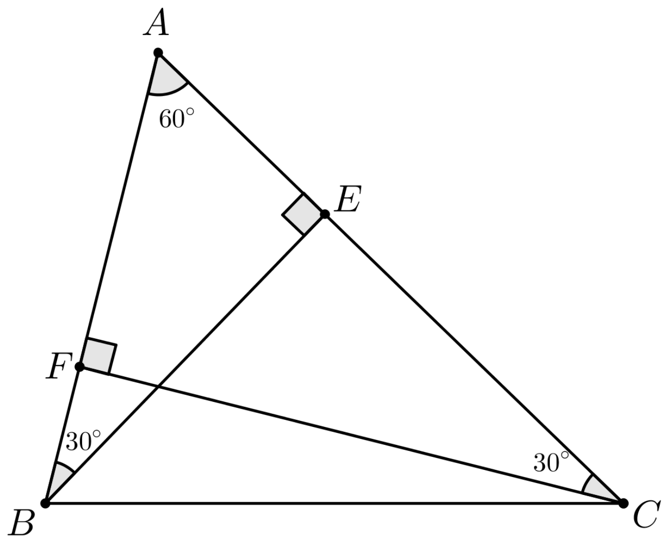
راه حل .

از آنجایی که ضلع مقابل به زاویه ۳۰° برابر با نصف وتر است داریم:

$$AE = \frac{AB}{۲} \longrightarrow CE = AC - \frac{AB}{۲}$$

$$AF = \frac{AC}{۲} \longrightarrow BF = AB - \frac{AC}{۲}$$

بنابراین $CE - BF = \frac{۳}{۲}(AC - AB)$.



۲. دو دایره $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B متقاطعند. خط دلخواهی از B می‌گذرانیم تا $\omega_۱$ را در C و $\omega_۲$ را در D قطع کند. نقاط E و F به ترتیب روی $\omega_۱$ و $\omega_۲$ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $CE = CB$ و $BD = DF$. فرض کنید BF دایره $\omega_۱$ را در P و BE دایره $\omega_۲$ را در Q قطع کند. ثابت کنید A و P و Q هم‌خطند.

ایمان مقصودی

−−−

راه حل .

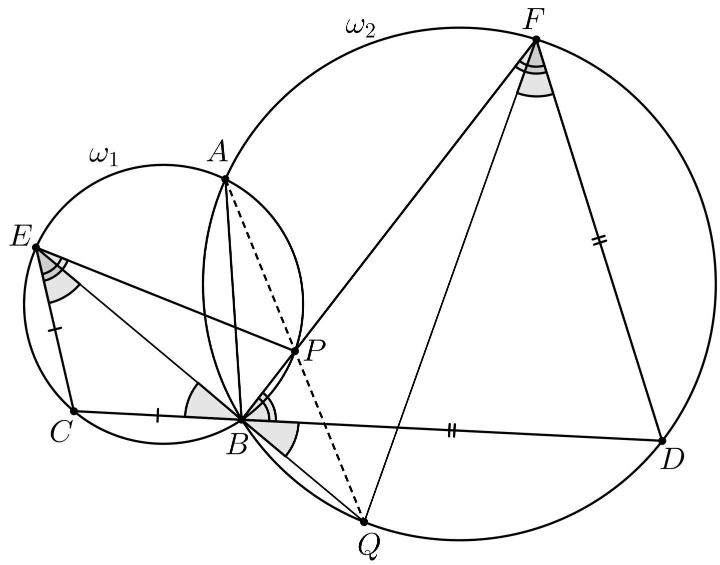
می دانیم که :

$$\angle BFD = \angle DBF = ۱۸۰^\circ - \angle CBP = \angle CEP \rightarrow \angle CEB + \angle BEP = \angle BFQ + \angle QFD$$

$$\angle CEB = \angle CBE = \angle QBD = \angle QFD$$

$$\rightarrow \angle BEP = \angle BFQ \rightarrow \angle BAP = \angle BEP = \angle BFQ = \angle BAQ$$

بنابراین سه نقطه A، P و Q هم‌خطند.



۳. n نقطه ($n > ۲$) در صفحه داده شده است که هیچ سه تایی از این نقاط هم‌خط نیستند. به ازای هر دو نقطه، خط واصل بین این نقاط را رسم می‌کنیم و نزدیکترین نقطه از بین بقیه نقاط به این خط را علامت می‌زنیم (فرض کنید در هر مورد این نقطه یکتا بوده است). حداکثر چند نقطه علامت می‌خورد؟

بوریس فرنکین (روسیه)

راه حل.

برای $n = ۴$ جواب برابر با ۳ و برای $n \neq ۴$ جواب برابر با n است. مسئله برای حالت $n = ۳$ واضح است. برای $n > ۴$، یک n ضلعی منتظم را در نظر بگیرید و آن را به صورتی تغییرشکل دهید که فرض‌های مسئله برقرار باشد. هر رأس نزدیکترین رأس به خطی است که دو رأس مجاورش را به هم وصل می‌کنند (این گزاره به طور مستقیم با محاسبه زوایا ثابت می‌شود).

حال اگر $n = ۴$ باشد دو حالت زیر پیش می آید:

حالت اول: نقاط داده شده تشکیل یک چهارضلعی محدب را می دهند. این چهارضلعی را $ABCD$ بنامید. از آنجا که برای هر ضلع نزدیکترین رأس به صورت یکتا تعیین می شود، هیچ دو ضلعی با یکدیگر موازی نیستند. فرض کنید خطوط AD و BC بعد از A و B و خطوط AB و CD بعد از B و C به یکدیگر برسند. بنابراین نقاط A، B و C علامت می خورند. فرض کنید نقطه D نیز علامت بخورد. در این صورت D نزدیکترین رأس به AC خواهد بود و مساحت مثلث ACD کمتر از مساحت مثلث ACB خواهد شد. از طرف دیگر، خطی از C موازی AD رسم کنید تا AB را در E قطع کند. نتیجه می گیریم که $CE < AD$. پس برای مساحت‌ها داریم $S_{ACD} > S_{ACE} > S_{ACB}$ که تناقض است.

حالت دوم: یکی از نقاط داده شده (آن را O بنامید) درون مثلث ABC تشکیل شده از نقاط دیگر باشد. به وضوح O نزدیکترین نقطه به تمامی سه ضلع مثلث است. بدون کم شدن از کلیت مسئله، نزدیکترین نقطه به خط AO را B فرض می‌کنیم. اگر نزدیکترین نقطه به BO نقطه A باشد بنابراین نقطه C علامت نمی‌خورد. فرض کنید نزدیکترین نقطه به BO نقطه C باشد. اگر نقطه A باقی مانده نیز علامت خورده باشد بنابراین این نقطه نزدیکترین نقطه به خط CO است. فرض کنید خط AO خط BC را در $A_۱$ قطع کند و نقاط $B_۱$ و $C_۱$ را نیز به طریق مشابه تعریف کنید. مساحت مثلث $AA_۱B$ از مساحت مثلث $AA_۱C$ کمتر است. در نتیجه $A_۱B < A_۱C$. به طریق مشابه $B_۱C < B_۱A$ و $C_۱B < C_۱A$. بنابراین $A_۱B \cdot B_۱C \cdot C_۱A < A_۱C \cdot B_۱A \cdot C_۱B$ که با قضیه سوا در تناقض است.

(در واقع نیازی به استفاده از قضیه سوا نیست. فرض کنید M_A، M_B و M_C اوساط اضلاع متناظر باشند و M مرکز ثقل مثلث باشد. بنابراین نقطه O باید درون هر یک از مثلث های MM_AB، MM_BC و MM_CA باشد که غیرممکن است)

۴. در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ از رأس A خط l را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. نقطه D را بر روی خط l به دلخواه در نظر می‌گیریم. پای عمودهای وارد از A بر BD و CD را به ترتیب E و F و پای عمودهای وارد از E و F بر l را به ترتیب P و Q می‌نامیم. ثابت کنید $AP + AQ \leq AB$.

مرتضی ثقفیان

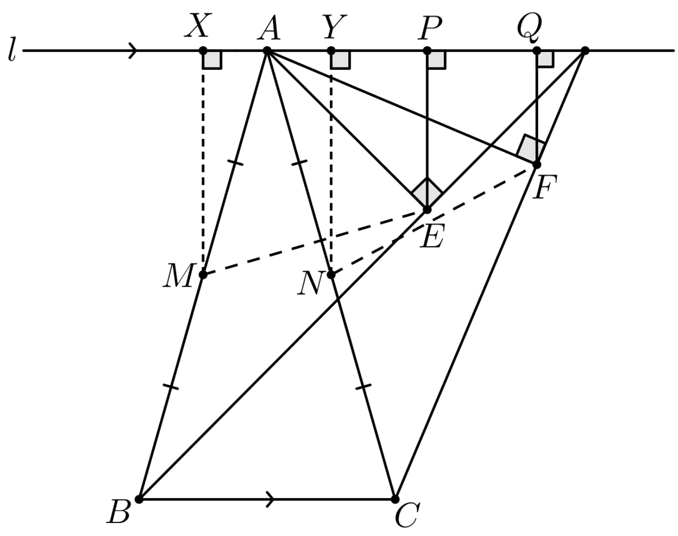
راه حل .

فرض کنید M و N به ترتیب اوساط اضلاع AB و AC باشند. پای عمودهای M و N را بر l به ترتیب X و Y می‌نامیم. از آنجایی که l موازی BC است پس $AX = AY$. از طرفی می‌دانیم طول تصویر هر پاره خط روی یک خط از طول آن پاره خط بیشتر نیست. پس داریم:

$$\frac{AB}{۲} = AM = ME \geq XP = AP + AX$$

$$\frac{AC}{۲} = AN = NF \geq YQ = AQ - AY$$

$$\rightarrow AB \geq XP + YQ = AP + AQ + AX - AY \rightarrow AB \geq AP + AQ$$

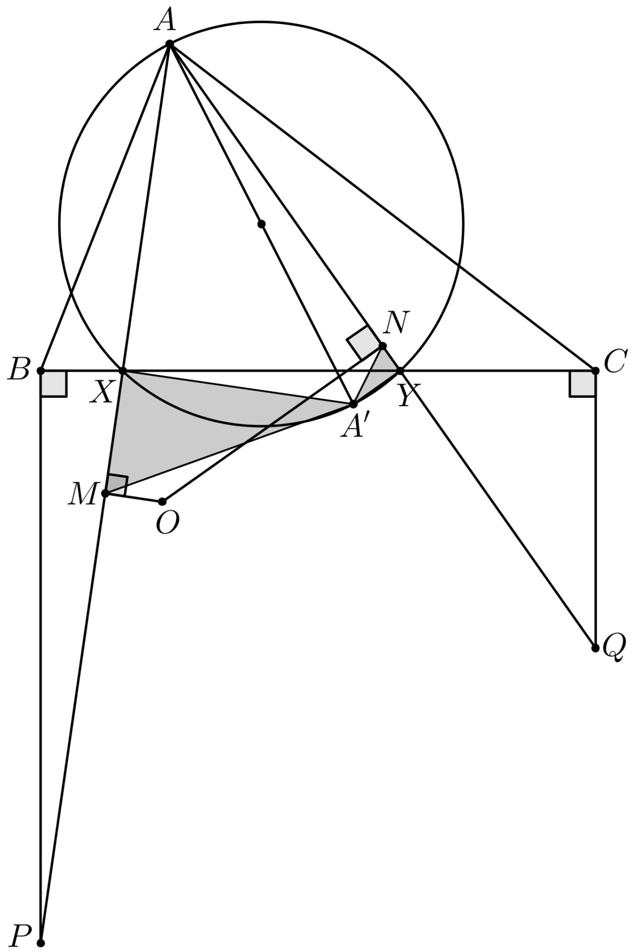


۵. در مثلث ABC نقاط X و Y را روی ضلع BC طوری در نظر می‌گیریم که $2XY = BC$. فرض کنید AA' قطر دایره محیطی مثلث AXY باشد. فرض کنید AX و عمود وارد از B بر BC یکدیگر را در P، و AY و عمود وارد از C بر BC یکدیگر را در Q قطع می‌کنند. ثابت کنید مماس در A' بر دایره محیطی مثلث AXY از مرکز دایره محیطی مثلث APQ عبور می‌کند.

ایمان مقصودی

راه حل.

فرض کنید O، M و N به ترتیب برابر با مرکز دایره محیطی مثلث APQ، وسط ضلع AP و وسط ضلع AQ باشند. می‌دانیم که $\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$ بنابراین چهارضلعی $AMON$ محاطی است. کافی است ثابت کنیم که زاویه $OA'A$ برابر با ۹۰ درجه است. یعنی کافی است نشان دهیم که پنج‌ضلعی $AMOA'N$ محاطی است که معادل با محاطی بودن $AMA'N$ است. اگر نشان دهیم که مثلث های $A'NY$ و $A'XM$ متشابه‌اند، در این صورت $\angle A'XM = \angle A'NY$ و حکم اثبات می شود.



می‌دانیم که چهارضلعی $AXA'Y$ محاطی است. پس $\angle A'XM = \angle A'NY$. بنابراین کافی است نشان دهیم:

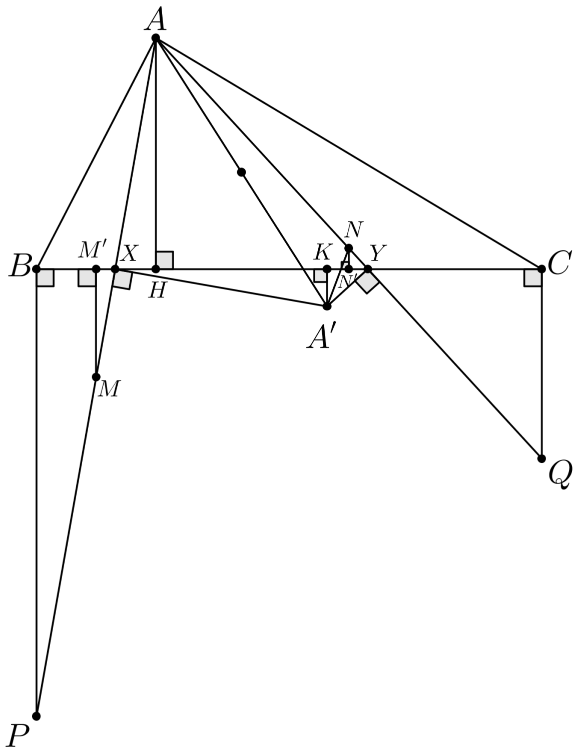
$$\frac{A'X}{MX} = \frac{A'Y}{NY} \quad (1)$$

فرض کنید H، K، M' و N' به ترتیب پای عمودهای واردشده از A، A'، M و N بر BC باشند. می‌دانیم که M و N اوساط اضلاع AP و AQ هستند. پس داریم:

$$BM' = HM' \quad \Rightarrow \quad XM' = HM' - XH = \frac{BH}{۲} - XH \quad (۲)$$

$$CN' = HN' \quad \Rightarrow \quad YN' = HY - HN' = HY - \frac{CH}{۲} = (XY - XH) - \frac{BC - BH}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad YN' = (XY - \frac{BC}{۲}) + (\frac{BH}{۲} - XH) = \frac{BH}{۲} - XH \quad (۳)$$



با توجه به معادلات (۲) و (۳) می‌توان گفت که $XM' = YN'$. از طرف دیگر می دانیم که AA' قطر دایره محیطی مثلث AXY است. بنابراین:

$$\angle A'YA = \angle A'XA = ۹۰^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle KA'Y = \angle NYN' \ , \ \angle KA'X = \angle MXM'$$

$$\Rightarrow \quad \triangle A'KX \sim \triangle XM'M \quad , \quad \triangle A'KY \sim \triangle YN'N$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'X}{MX} = \frac{A'K}{XM'} \quad , \quad \frac{A'K}{NY'} = \frac{A'Y}{NY} \quad \Rightarrow \quad \frac{A'X}{MX} = \frac{A'Y}{NY}$$

بنابراین معادله (۱) ثابت شد و به این ترتیب حکم ثابت می شود.

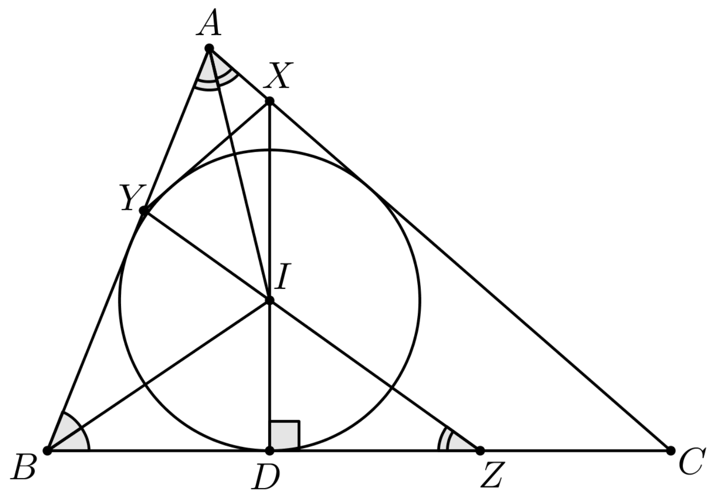
آزمون المپیاد هندسه (سطح پیشرفته)

۱. در مثلث ABC، محل برخورد نیمسازها را I و محل تماس دایره محاطی داخلی با ضلع BC را D می‌نامیم. فرض کنید DI ضلع AC را در X قطع کند. مماس وارد از X بر دایره محاطی ضلع AB را در Y قطع می‌کند. اگر محل برخورد YI و BC را Z بنامیم ثابت کنید $AB = BZ$.

هومن فتاحی مقدم

– –

راه حل.
از آنجایی که I مرکز دایره محاطی خارجی در مثلث AXY است، بنابراین $\angle XIY = ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲}$ و در نتیجه $\angle IZB = \frac{\angle A}{۲}$. بنابراین طبق قاعده برابری دو زاویه و ضلع بین، مثلث‌های BIZ و BIA همنهشتند. پس $AB = BZ$.



۲. شش دایره دوبدو غیرمتقاطع داریم که شعاع هریک از آنها حداقل واحد است. ثابت کنید هر دایره که هر شش دایره را قطع کند شعاعش حداقل واحد است.

محمدعلی آبام - مرتضی ثقفیان

راه حل.
مراکز شش دایره را $O_۱, O_۲, \ldots, O_۶$ و شعاع های آنها را به ترتیب $R_۱, R_۲, \ldots, R_۶$ می‌نامیم. فرض کنید دایره به مرکز O و شعاع R این شش دایره را قطع کند. به وضوح اندیس های i, j موجودند که داشته باشیم $O_iOO_j < ۶۰^\circ$. اما از طرفی طول O_iO_j حداقل برابر با $R_i + R_j$ است و طول‌های O_iO و O_jO به ترتیب کوچکتر یا مساوی $R_i + R$ و $R_j + R$ هستند. اگر $R < ۱$ باشد با توجه به اینکه طبق فرض مسئله $R_i, R_j > ۱$، نتیجه می شود که در مثلث O_iOO_j، O_iO_j بزرگترین ضلع است و بنابراین $O_iOO_j \geq ۶۰^\circ$ که تناقض است. بنابراین $R \geq ۱$.

۳. در مثلث ABC فرض کنید O مرکز دایره محیطی باشد. خط CO ارتفاع وارد از A بر ضلع BC را در K قطع می‌کند. وسط AK را P و وسط AC را M در نظر بگیرید. اگر PO ضلع BC را در Y و دایره محیطی مثلث BCM ضلع AB را در X قطع کند ثابت کنید چهارضلعی $BXOY$ محاطی است.

علی دایی نبی - حمید پردازی

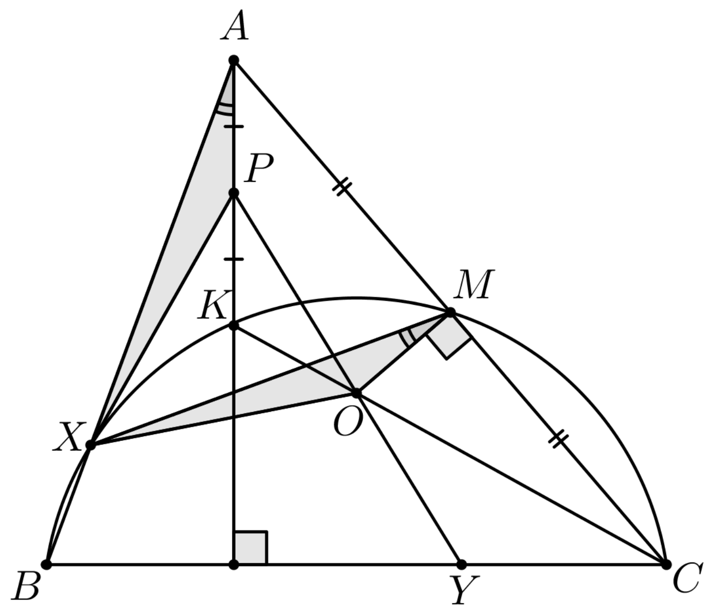
راه حل.

می‌خواهیم نشان دهیم که $\angle XOP = \angle B$. داریم:

$$\angle B = \angle XMA \to \angle XMO = ۹۰^\circ - \angle B = \angle XAK$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که دو مثلث XOP و XMA متشابه هستند. کافی است نشان دهیم که مثلث های XPA و XOM متشابه هستند. برابری یک زاویه را نشان دادیم. پس کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{AX}{XM} = \frac{AP}{OM}$$



چهارضلعی $BXMC$ محاطی است. بنابراین مثلث های AXM و ACB متشابه‌اند. در نتیجه:

$$\frac{AM}{XM} = \frac{AC}{BC} \quad (۱)$$

نقطه O را مرکز دایره محیطی مثلث ABC در نظر بگیرید. در نتیجه داریم:

$$\angle OCA = ۹۰^\circ - \angle B, \angle AKC = ۱۸۰^\circ - \angle A$$

بنابر قضیه سینوس‌ها در مثلث‌های AKC، OMC و ABC می توان گفت:

$$\frac{AC}{\sin A} = \frac{AK}{\sin ۹۰^\circ - B}, OC = \frac{OM}{\sin ۹۰^\circ - B}$$

$$\rightarrow \frac{AK}{OM} = \frac{AC}{OC \cdot \sin A} \rightarrow \frac{AP}{OM} = \frac{AC}{۲OC \cdot \sin A} = \frac{AC}{BC} \quad (۲)$$

بنابر معادلات (۱) و (۲) می توان گفت که دو مثلث XPA و XOM متشابه‌اند و در نتیجه مثلث‌های XOP و XMA متشابه‌اند. پس:

$$\angle XBP = \angle XMA = \angle B$$

۴. بر خط l، سه دایره ω_1، ω_2 و ω_3 را به ترتیب در نقاط A، B و C به گونه‌ای مماس می‌کنیم که ω_2 بر دو دایره دیگر مماس خارج باشد (هر سه دایره در یک طرف l قرار دارند و B بین A و C قرار دارد). اگر مماس مشترک ω_1 و ω_3 دایره ω_2 را در X و Y، و عمود وارد از B بر l دایره ω_2 را در Z قطع کند، ثابت کنید دایره به قطر AC بر ZX و ZY مماس است.

ایمان مقصودی - سیامک احمدپور

راه حل.

فرض کنید S محل برخورد XY با l باشد. محل تماس دایره‌های ω_1 و ω_2 را E و محل تماس دایره های ω_2 و ω_3 را F می نامیم. واضح است که نقاط E، F و S هم‌خط می باشند.

P و Q را به ترتیب محل تماس XY با دودایره ω_1 و ω_3 می نامیم. داریم:

$$\to SE \cdot SF = SP \cdot SQ = SA \cdot SC$$

بنابراین چهارضلعی های $PEFQ$ و $AEFC$ محاطی‌اند. اگر T وسط کمان XY در دایره ω_2 (کمانی که شامل رأس Z نیست) باشد از آنجایی که مماس در T موازی XY است نتیجه می شود که نقاط P، E و T و همچنین نقاط Q، F و T هم‌خط‌اند. بنابراین داریم:

$$TE \cdot TP = TF \cdot TQ \to P_{\omega_1}(T) = P_{\omega_3}(T)$$

از طرف دیگر از آنجایی که مماس در Z موازی l است پس می توان گفت که نقاط Z، E و T و همچنین نقاط C، F و Z هم‌خط‌اند. پس داریم:

$$ZE \cdot ZA = ZF \cdot ZC \to P_{\omega_1}(Z) = P_{\omega_3}(Z)$$

بنابراین ZT محوراصلی دو دایره ω_1 و ω_3 است.

بنابراین اگر M وسط AC باشد، M، T و Z هم‌خط می باشند چرا که هر سه تای آن‌ها روی محوراصلی دو دایره ω_1 و ω_3 قرار دارند.

محل برخورد ZM و PQ را D و H را پای عمود وارد از Z بر PQ می‌نامیم. می دانیم:

$$\angle HZD = \angle MZB = \frac{|\angle ZXY - \angle ZYX|}{2} = \alpha$$

فرض کنید $x = ZY$، $y = ZX$ و $t = XY$ باشد. داریم:

$$AM = \frac{ZB}{\cos\alpha} = \frac{ZB}{\frac{ZH}{ZD}} = \frac{ZB}{ZH} \cdot ZD = \frac{ZB}{ZH} \cdot \frac{2xy}{x+y} \cdot \cos\frac{\angle XZY}{2}$$

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم فاصله M از ZX و ZY نصف AC است یعنی:

$$AM \cdot \sin\frac{\angle XZY}{2} = \frac{AC}{2} \leftrightarrow 2AM \cdot \sin\frac{\angle XZY}{2} = \frac{ZB}{ZH} \cdot \frac{2xy}{x+y} \cdot \sin\angle XZY = AC$$

اما از طرف دیگر داریم:

$$S_{XYZ} = \frac{1}{2} ZH \cdot t = \frac{1}{2} xy \sin z \to \frac{xy \sin z}{ZH} = t$$

پس کافی است ثابت کنیم که $AC = \frac{2t \cdot ZB}{x+y}$.

می دانیم که:

$$\angle BFZ = \angle BEZ = ۹۰^\circ \rightarrow ZB^۲ = ZE \cdot ZA = ZF \cdot ZC$$

پس طول مماس از Z بر دایره های $\omega_۱$ و $\omega_۲$ برابر با ZB است.
بر اساس قضیه تعمیم بطلمیوس در دو چهارضلعی زیر داریم:

$$ZY\omega_۱X : x \cdot PX + y \cdot (t + PX) = t \cdot ZB \rightarrow (x+y)PX + yt = t \cdot ZB$$

$$ZX\omega_۲Y : y \cdot YQ + x \cdot (t + YQ) = t \cdot ZB \rightarrow (x+y)YQ + xt = t \cdot ZB$$

$$\rightarrow PX + YQ + t = \frac{۲t \cdot ZB}{x+y} \rightarrow AC = \frac{۲t \cdot ZB}{x+y}$$

۵. فرض کنید A و B و C و D چهار نقطه بر روی یک صفحه باشند و S کره‌ای باشد که بر این صفحه مماس است. نقطه A' را به صورتی در نظر می‌گیریم که S به وجوه چهاروجهی $A'BCD$ مماس شود. نقاط B' و C' و D' نیز به صورت مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید نقاط A' و B' و C' و D' بر روی صفحه‌ای قرار دارند که بر کره S مماس است.

الکسی زاسلاوسکی (روسیه)

راه حل.

فرض کنید کره در نقطه P بر صفحه مماس باشد. D' محل هم‌رسی صفحه‌های گذرنده از AB ،BC ،CA و مماس بر کره است (C' ،B' و A' به همین ترتیب). فرض کنید صفحه گذرنده از X و Y و مماس بر کره، در نقطه P_{XY} مماس شود.
نقاط P، P_{AB} ،P_{AC} و P_{AD} روی دایره ای به نام ω_a قرار دارند زیرا همگی وقتی به A وصل شوند بر کره مماس می‌شوند.
به ترتیب سه‌تایی‌های دیگری از نقاط هم با P هم‌دایره‌اند و دایره‌های ω_b ،ω_c و ω_d را به طریق مشابه تعریف می کنیم.
با انعکاس از نقطه‌ی P و نسبت دلخواه کره تبدیل به صفحه می‌شود و ω_aها تبدیل به ۴ خط می‌شوند که با توجه به همرسی دایره‌ها در نقطه‌ی میشل برای ۴ خط خواهیم داشت دایره‌های $P_{BC}P_{CD}P_{DB}$ ،$P_{AC}P_{CD}P_{DA}$ ،$P_{AB}P_{BD}P_{DA}$ و $P_{AB}P_{BC}P_{CA}$ به ترتیب به نام‌های ω'_a ،ω'_b ،ω'_c و ω'_d روی کره در نقطه‌ای به نام P' همرسند. چون ω'_d در واقع مکان هندسی محل تماس خطوط گذرا از D' و مماس بر کره است پس $D'P'$ مماس بر کره است و D' روی صفحه‌ی مماس بر کره در P' است و به طریق مشابه A'، B' و C' هم روی صفحه‌ی مماس بر کره در P' هستند که هم صفحه بودن آن‌ها و مماس بودن صفحه بر کره را نتیجه می‌دهد.