مترجم: ماهان ملیحی
دانشجوی کارشناسی مهندسی
برق دانشگاه صنعتی شریف

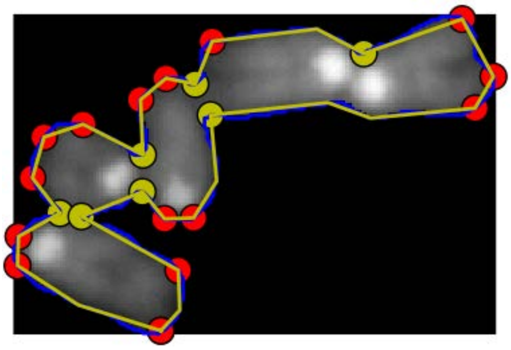
چندضلعی‌های منتظم در کاغذهای مچاله![1]

مقدمه

مسئلهٔ بازیابی شکل‌های چندضلعی‌گون در صفحه، که در اثر عواملی تصویر آن‌ها دستخوش تغییراتی شده در اصل ریشه در رشتهٔ زیست‌شناسی دارد. یکی از مدل‌های متصور برای کرومزوم‌ها حلقه‌هایی به شکل چندضلعی است. این حلقه‌ها تحت تأثیر شرایط پیرامون خود ممکن است واپیچیده[2] شده و تغییر شکل بدهند. تا خوردن یکی از انواع این تغییرات است که ما در طی این مقاله به بررسی اثر آن بر روی حلقه‌های منتظم می‌پردازیم. به وضوح تا کردن صفحه، یک n-ضلعی را به n نقطهٔ نه لزوماً متمایز تبدیل می‌کند. در ادامه نشان خواهیم داد، هر سه نقطه در صفحه تصویر یک مثلث متساوی‌الاضلاع تحت یک بار تا زدن هستند. همچنین هر چهار نقطه را می‌توان با حداکثر سه بار تا زدن از یک مربع مناسب در صفحه بدست آورد. در نهایت به بررسی این حدس می‌پردازیم که آیا برای هر آرایش n نقطه در صفحه می‌توان n-ضلعی منتظمی یافت که با متناهی بار تا زدن صفحه بتوان از چندضلعی به نقاط رسید. نشان می‌دهیم این حدس درست است و کران‌هایی برای تعداد تا زدن‌های لازم ارائه می‌کنیم.

[1] این مقاله ترجمه‌ای است از مقاله Transforming n-gons by Folding the Plane نوشتهٔ P. Sabinin و M. G. Stone که در مجلهٔ The American Mathematical Monthly در سال ۱۹۹۵ شماره ۱۰۲ جلد ۷ چاپ شده است.

[2] Distorted



شکل ۱: کرومزوم‌ها و چندضلعی‌ها

سه نقطه

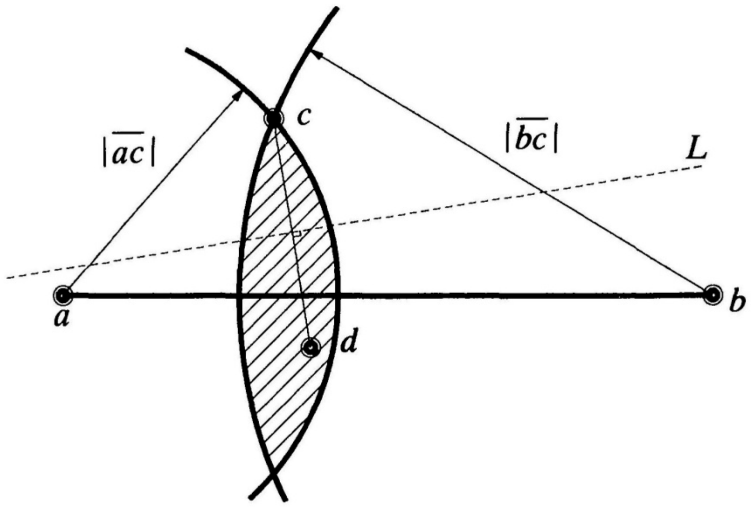
به بررسی دقیق‌تر تا زدن صفحه حول یک خط می‌پردازیم. تا زدن حول خط L همهٔ نقاط یک نیم‌صفحه را ثابت نگه می‌دارد و باقی نقاط را به قرینهٔ آیینه‌ای آن‌ها نسبت به L می‌نگارد. برای راحتی کار در ابتدا چند نماد را با هم قرار داد می‌کنیم. اگر نقطهٔ x در اثر تا کردن ثابت نماند، تصویر نقطهٔ x را با x' نشان می‌دهیم. برای نمایش پاره‌خط بین نقاط a و b از $\overline{ab}$ و برای نمایش اندازهٔ آن از نماد $|ab|$ استفاده می‌کنیم. همچنین نماد $x \in \overline{ab}$ یعنی: x روی پاره‌خط $\overline{ab}$ است.

در ابتدا علاقه‌مند هستیم بدانیم کدام نقاط از نقطهٔ مشخص c با یک بار تا زدن قابل دسترسی هستند. اگر محدودیت بیشتری نداشته باشیم، برای هر نقطهٔ دیگری مثل d، کافیست صفحه را حول خط L عمود منصف $\overline{cd}$ تا بزنیم. اما اگر بخواهیم نقطه‌ای مثل a نیز تحت تا زدن ثابت بماند، نقاط قابل دسترس دقیقاً نقاطی مثل d هستند که داخل یا روی دایره‌ای به مرکز a و شعاع $r = |ac|$ قرار دارند. اگر محدودیت خود را به ثابت ماندن دو نقطهٔ a و b افزایش دهیم، همان‌طور که در تصویر (شکل ۲) نشان داده شده است، مجموعهٔ نقاط قابل دسترس از c به نقاط داخل عدسی حاصل از اشتراک دو دایره تقلیل می‌یابند. برای نقطهٔ d در ناحیهٔ هاشورخورده، تا زدن c بر روی d، نقاط a و b را ثابت نگه می‌دارد. به طور دقیق‌تر، چون $\overline{cd}$ بخشی از وترهایی در هر دو دایره است و عمود منصف‌های این وترها باید از مراکز دو دایره که همان a و b هستند بگذرند، پس L نمی‌تواند پاره‌خط $\overline{ab}$ را قطع کند و بالای آن قرار می‌گیرد.

این نتیجه به راحتی قابل تعمیم است:

لم ۱. نقاط قابل دسترس از c با یک بار تا زدن، با این شرط که نقاط $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ ثابت بمانند، دقیقاً نقاط داخل یا روی مرز اشتراک دایره‌های C_i (دایرهٔ به مرکز a_i و گذرنده از c)، برای $۱ \leq i \leq n$ است.

اثبات. درستی حکم به ازای $n = ۱,۲$ روشن است. حال برای $k \geq ۲$، $k + ۱$ نقطه را در نظر بگیرید. فرض کنید $d \in \bigcap_{i=۱}^{k+۱} C_i$ و L عمود منصف $\overline{cd}$ باشد. توجه کنید که اگر c را حول L روی d تا کنیم، برای هر $۱ \leq j \leq n$ داریم $d \in C_j$. پس L از پاره‌خط $\overline{ca_j}$ یا دو سر آن می‌گذرد. در نتیجه تا زدن حول L تمام نقاط a_j را برای $۱ \leq j \leq n$



شکل ۲: نقاط قابل دسترس با ثابت نگه داشتن دو نقطه

ثابت نگه می‌دارد. □

لم ۲. تا زدن حول هر خط L، فاصلهٔ بین هیچ دو نقطه‌ای را بیشتر نمی‌کند. یعنی برای هر دو نقطه داریم: $|ab| \geq |a'b'|$.

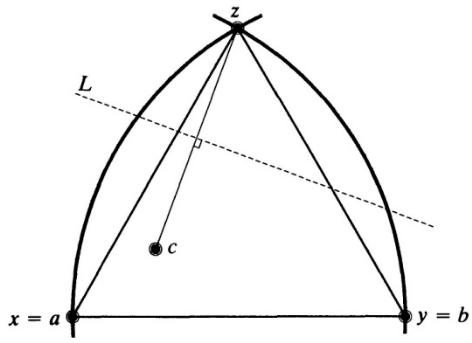
اثبات. نتیجهٔ مستقیم نابرابری مثلث (قضیهٔ حمار) است. □

قضیه ۳. برای هر سه نقطهٔ دلخواه در صفحه مثل a, b, c، مثلث متساوی‌الاضلاع T با رئوس x, y, z وجود دارد که a, b, c به ترتیب تصویر نقاط x, y, z تحت یک بار تا زدن هستند.

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض کنید $|ab|$ بزرگترین فاصلهٔ ظاهر شده بین سه نقطهٔ a, b, c باشد. در این‌صورت همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌کنید، c درون یکی از دو نیمهٔ پایین یا بالای اشتراک دو دایره به شعاع $|ab|$ و مراکز a و b خواهد بود. قرار دهید $x = a, y = b$ و z را طوری در نظر بگیرید که T مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد. در این صورت تا زدن حول عمود منصف $\overline{cz}$، z را به c می‌برد و طبق لم نخست a و b را ثابت نگاه می‌دارد. □

چهار نقطه

حدس می‌زنیم هر چهار نقطهٔ دلخواه در صفحه، تصویر رئوس مربعی با حداکثر دو بار تا کردن هستند. در ادامه دو قضیهٔ ضعیف‌تر را ثابت می‌کنیم.



شکل ۳: نقاط قابل دسترس از مثلث متساوی‌الاضلاع

قضیه ۴. برای هر چهار نقطهٔ دلخواه در صفحه مثل a, b, c, d، مربع S با رئوس x, y, z, w موجود است که با حداکثر سه بار تا زدن، a, b, c, d به ترتیب تصاویر x, y, z, w باشند.

اثبات. برای چهار نقطهٔ مورد نظر، سه آرایش ممکن در شکل‌های زیر نشان داده شده است. در حالتی که این نقاط یک مستطیل تشکیل دهند به وضوح یک بار تا زدن کافیست و در این حالت حکم برقرار است. حال فرض کنید چهار نقطه هم‌خط باشند. مربعی را در نظر بگیرید که یکی از نقاط انتهایی رأس آن باشد و هر چهار نقطه روی یک نیمه از یک قطر آن قرار بگیرند، مثلاً نیمهٔ نزدیک به رأس x. (شکل ۴ الف را ببینید.) در این صورت با تا کردن z روی d، نقاط y, w ثابت می‌مانند. برای پایان یافتن کار، کافیست w و y را روی b و c تا بزنیم.
به بررسی حالت باقیمانده می‌پردازیم. در این جا با چهار نقطهٔ غیر هم خط سر و کار داریم. در هر دو حالت نمایش داده شده در شکل‌های ۴ ب و ۴ پ فرض کرده‌ایم زاویهٔ رأس a کمتر از قائمه است. همچنین در هر دو شکل، نقطهٔ مقابل a را c نام‌گذاری کرده‌ایم. مربعی با رئوس x, y, z, t را در نظر بگیرید که x و a منطبق هستند و قطر مربع نیمساز زاویهٔ a است. به راحتی می‌توان دید که اگر مربع به اندازهٔ کافی بزرگ انتخاب شود شروط زیر برقرار می‌شود:

۱. عمود منصف‌های $\overline{ad}$ و $\overline{ab}$ هر دو ضلع $\overline{xy}$ و $\overline{xw}$ را قطع می‌کنند.

۲. در حالتی که $abcd$ چهارضلعی است، عمود منصف $\overline{ac}$ نیز هر دو ضلع $\overline{xy}$ و $\overline{xw}$ را قطع می‌کند.

۳. تمام ناحیهٔ محدب $abcd$ داخل نیمهٔ پایینی عدسی تشکیل شده توسط دو دایرهٔ گذرنده از z و به مراکز y و w قرار می‌گیرد.

حال با اجرای مراحل زیر مربع $xyzt$ با تا کردن به $abcd$ تبدیل می‌شود:

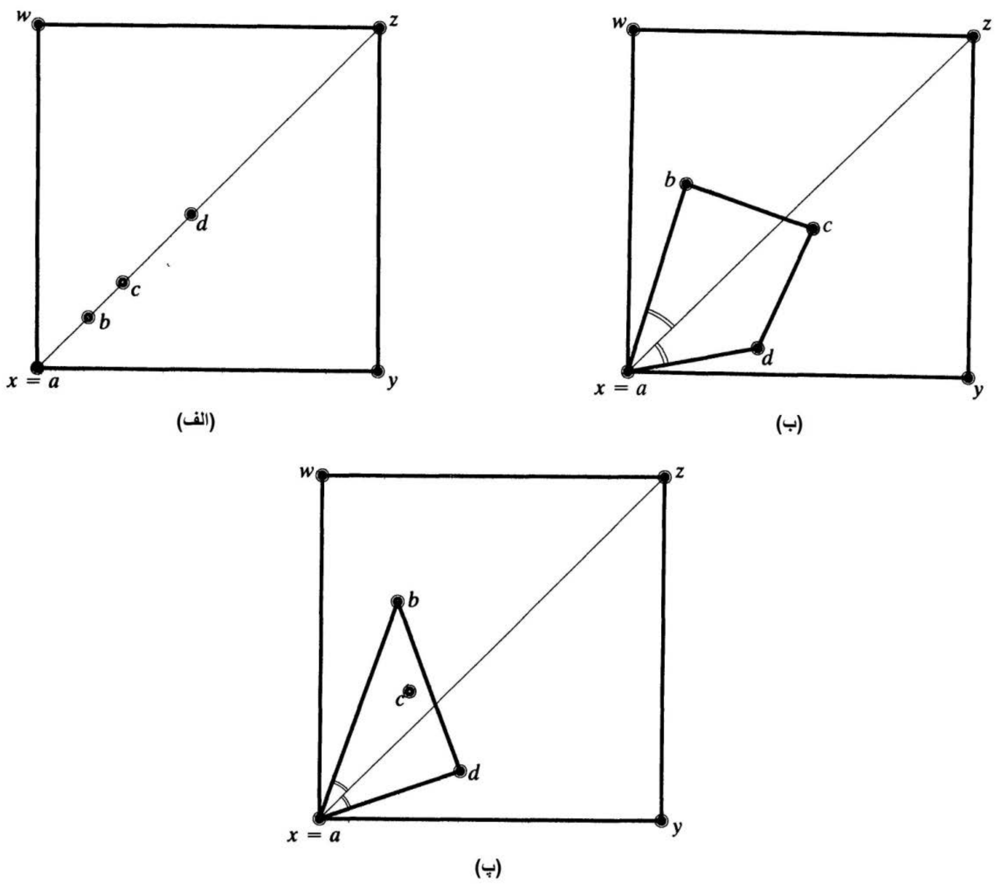
- ابتدا z را روی یکی از نقاط b, c, d که فاصلهٔ کمتری تا قطر xz دارد تا می‌کنیم.
- سپس y را روی نقطهٔ نزدیک‌تر به خودش از بین دو نقطهٔ دیگر تا می‌کنیم.

- در آخر w را روی نقطهٔ باقی‌مانده تا می‌کنیم.

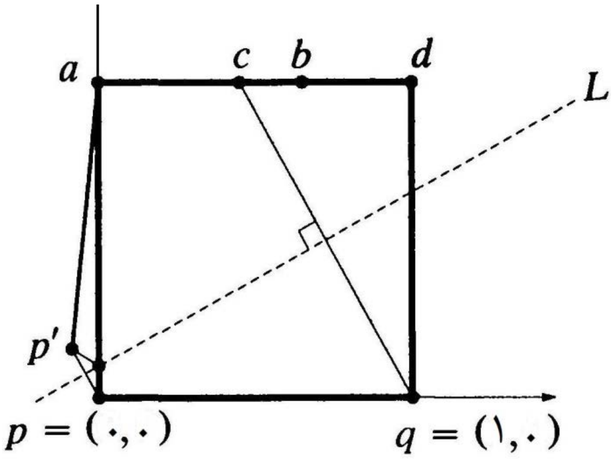
شروط ۱،۲،۳ و لم ۱ تضمین می‌کنند که نقاط a,b,c,d تحت این اعمال، در هر مرحله ثابت می‌مانند. پس تا زدن‌ها تداخلی با هم ندارند و نهایتاً مربع $xyzt$ به $abcd$ تبدیل می‌شود. □

قضیه ۵. هر چهار نقطهٔ هم‌خط در صفحه، تصویر یک مربع مناسب با حداکثر دو بار تا زدن است.

اثبات. فرض کنید a,d نقاط انتهایی هستند و نقاط طوری نام‌گذاری شده‌اند که $|ac| < |ab|$ و $|ac| \le |bd|$. یعنی $|ac|$ کوچکترین فاصله بین یک نقطهٔ درونی و یک نقطه از دو سر پاره‌خط است.
مختصات نمایش داده شده در شکل ۵ را در نظر بگیرید. در مرحلهٔ اول با تا کردن q روی c، نقاط a,d ثابت می‌مانند و تصویر p نقطهٔ p' می‌شود. در مرحلهٔ بعد p' را روی b تا می‌کنیم و در این حرکت نقاط a,c,d ثابت می‌مانند. درستی ادعای مطرح‌شده در چند سطر قبل را بررسی می‌کنیم. چون c داخل عدسی به وجود آمده از



شکل ۴: (الف) نقاط هم‌خط (ب) چهارضلعی محدب (پ) مثلث و یک نقطهٔ درونی



شکل ۵: نام‌گذاری مناسب برای چهار نقطهٔ هم‌خط

دایره‌های گذرنده از q و به مراکز a و d قرار دارد، تا کردن q روی c، توسط تا زدن حول خط L عمود منصف $\overline{qc}$، نقاط a,c,d را ثابت نگاه می‌دارد.
برای دقیق‌تر شدن استدلالمان برای ادعای دوم، نیاز به شناسایی نقطهٔ p'، تصویر $p = (۰, ۰)$ داریم. نمایش پارامتری خط $L_۱$ گذرنده از $c = (k, ۱)$ و $q = (۱, ۰)$ به شکل $(x, y) = (۱ + t, \frac{-۱}{(۱-k)} t)$ و برای خط L به شکل $(x, y) = (\frac{k+۱}{۲} + t, \frac{۱}{۲} + (۱-k)t)$ است. بنابراین L ضلع ap را در نقطهٔ $(۰, \frac{k^۲}{۲})$ قطع می‌کند و فاصلهٔ این نقطه با p و p' برابر $\frac{k^۲}{۲}$ است. مشکل اصلی نشان دادن این است که $|ap'|$ به اندازه‌ای بزرگ است که با ثابت ماندن a تحت تا زدن، p' به نقطهٔ b برسد.
حال توجه کنید که چون $|ac| \le |bd|$، باید داشته باشیم $k = |ac| < \frac{۱}{۲}$ یا معادلاً $k^۲ < \frac{k}{۲}$. همچنین از نامساوی حمار دربارهٔ مسیر $p \leftarrow (۰, \frac{k^۲}{۲}) \leftarrow p' \leftarrow a$ داریم $|ap'| + \frac{k^۲}{۲} + \frac{k^۲}{۲} > |ap| = |ad|$. پس تا به اینجا نامساوی $|ap'| > |ad| - k^۲ > |ad| - \frac{k}{۲}$ را به دست آورده‌ایم. همچنین چون $|ac| \le |bd|$ رابطهٔ $|ad| - \frac{k}{۲} \ge |ad| - |bd| \ge |ab|$ برقرار خواهد بود. نتیجهٔ مورد نظر حاصل شد، یعنی $|ab| < |ap'|$ که نشان می‌دهد b درون عدسی تشکیل‌شده توسط دایره‌های گذرنده از p' و به مراکز a و d قرار دارد. پس p' می‌تواند طوری روی b قرار گیرد که تحت این تا زدن a ثابت بماند. این تا زدن c, d را نیز ثابت نگاه می‌دارد و مربع با دو بار تا زدن به چهار نقطهٔ هم‌خط تبدیل می‌شود.

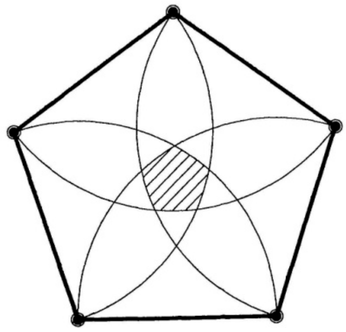
□

کران برای $n \ge ۵$

طبیعتاً با توجه به قضیه‌های ۳ و ۴ حدس می‌زنیم که هر n نقطه در صفحه تصویر یک n-ضلعی منتظم تحت متناهی بار تا زدن است. ابتدا این قضیه را به صورت مستقیم برای $n = ۵$ ثابت می‌کنیم.

قضیه ۶. هر پنج نقطه در صفحه، تصویر یک پنج‌ضلعی منتظم مناسب با حداکثر پنج بار تا زدن است.

اثبات. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، عدسی‌های تشکیل شده از برخورد دایره‌های به مراکز رئوس مجاور یک رأس و گذرنده از آن دارای ناحیه‌ای مشترک هستند. حال کافیست پنج‌ضلعی را به قدر کافی بزرگ انتخاب کنیم تا هر پنج نقطهٔ ما درون ناحیهٔ هاشورخورده قرار بگیرند. در این صورت طبق لم ۱ با تا زدن هر کدام از رئوس روی یکی از این نقاط باقی نقاط ثابت خواهند ماند. □



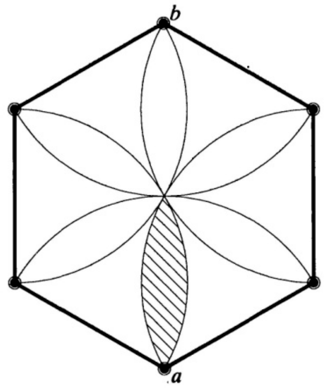
شکل ۶: پنج‌ضلعی و اشتراک عدسی‌ها

قضیه ۷. هر شش نقطه در صفحه، تصویر یک شش‌ضلعی منتظم مناسب با حداکثر هفت بار تا زدن است.

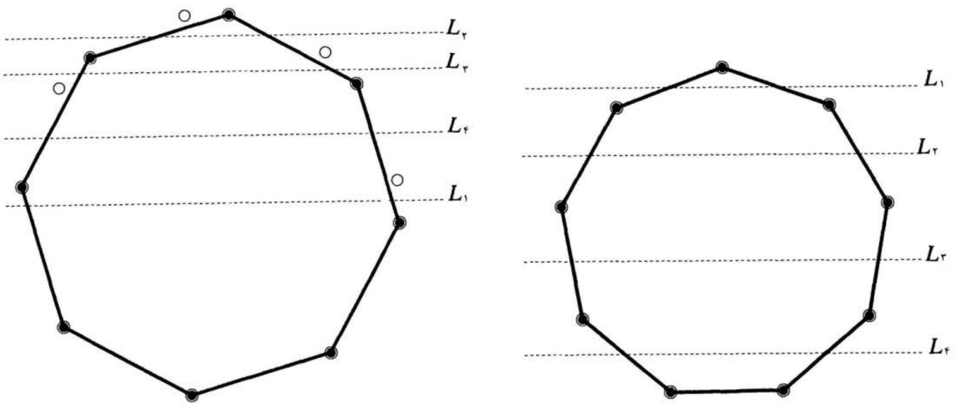
اثبات. روند کار مانند روش به کار گرفته شده برای پنج‌ضلعی است. با این تفاوت که در این حالت، عدسی‌ها در دقیقاً یک نقطه اشتراک دارند. شش‌ضلعی را به قدری بزرگ انتخاب می‌کنیم که نقاط ما درون یک دایرهٔ بسیار کوچک در مرکز یک عدسی (مثل عدسی هاشورخورده) قرار گیرد. نقطهٔ رو به روی نقطهٔ a یعنی b را روی مرکز شش‌ضلعی، تا می‌کنیم. از بین شش نقطهٔ مورد نظر، نزدیک‌ترین نقطه به مرکز و نزدیک‌ترین نقطه به a را به ترتیب b' و b'' و a' نام‌گذاری کنید. حال تمام رئوس دیگر شش‌ضلعی را به این ترتیب روی نقاط بدون اسم از بین شش نقطهٔ داخل عدسی تا می‌کنیم که ابتدا دو رأس نزدیک b و سپس دو رأس نزدیک a تا شوند. در این صورت لم ۱ تضمین می‌کند که نقاط a و b' دست‌نخورده باقی می‌مانند. برای اتمام کار کافیست a را روی a' و b' را روی b'' تا کنیم. همان‌طور که می‌بینید، تطبیق این دو مجموعه از نقاط را با هفت مرحله تا زدن انجام دادیم. □

لم ۸. هر n−ضلعی منتظم می‌تواند با متناهی بار تا زدن به مجموعه‌ای از n نقطهٔ هم‌خط تبدیل شود. برای nهای زوج حداکثر $\frac{n}{2}$ و برای nهای فرد حداکثر $\frac{n-1}{2}$ تا زدن نیاز داریم.

اثبات. برای nهای زوج، خط L_1 گذرنده از مرکز را طوری انتخاب کنید که تا زدن حول این خط n نقطهٔ متمایز تولید کند. (از آنجایی که حداکثر $\binom{n}{2}$ خط داریم که تا زدن حول آن‌ها دو نقطه یا بیشتر را روی هم قرار می‌دهد، L_1 با شرایط مذکور موجود است.) در ادامه در نظر داریم برش‌های موازی خط L_1 را طوری در نظر بگیریم که با تا



شکل ۷: شش‌ضلعی منتظم



(الف) شکل ۸: (ب)

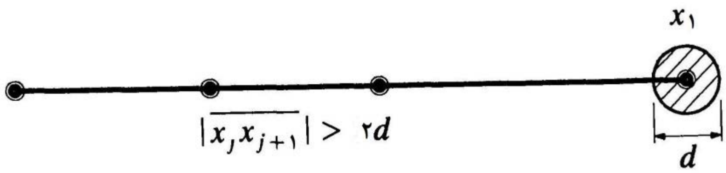
زدن هر لایهٔ حاصل از برش روی لایهٔ پایین خود همهٔ نقاط روی خطی موازی L_1 قرار گیرند. روند پیدا کردن این خطوط با توجه به شکل ۸ الف روشن است. ابتدا با تا زدن حول خط L_1، نقاط تو خالی به وجود می‌آیند و سپس با تا زدن حول خط L_2، چهار نقطهٔ بالایی را هم‌خط می‌کنیم. این روند را با خطوط $L_3, L_4, \ldots$ ادامه می‌دهیم و با $\frac{n}{2}$ عمل تا زدن نقاط را هم‌خط می‌کنیم. نکتهٔ اصلی در این است که فاصلهٔ هر دو رأس مقابل n-ضلعی از L_1 برابر است و در نتیجه بعد از تا زدن روی L_1، این دو رأس متقابل روی خطی موازی L_1 قرار می‌گیرند. همین روش برای nهای فرد نیز قابل انجام است، تنها با این تفاوت که $\frac{n-1}{2}$ تا زدن مورد نیاز است.(شکل ۸ ب) $\square$

لم ۹. فرض کنید نقاط $\{a_1, \ldots, a_n\}$ در داخل دیسک بازی[3] به قطر d باشند. همچنین $\{x_1, \ldots, x_n\}$ مجموعه‌ای از نقاط هستند که با ترتیب شماره‌گذاری‌شده روی یک خط قرار گرفته‌اند، $x_1 = a_1$ و برای هر $j = i + 1$

[3] دیسک باز: نقاط درون یک دایره که روی خود دایره قرار ندارند.

$(i=۱,۲,\dots,n-۱)$، $|x_ix_j|\ge ۲d$. در این صورت می‌توان با $(n-۱)$ بار تا زدن $\{x_۱,\dots,x_n\}$ را به $\{a_۱,\dots,a_n\}$ تبدیل کرد.

اثبات. حکم را با استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. برای بررسی پایهٔ استقرا، حالت $n=۲$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که $a_۲$ درون دایرهٔ به مرکز $x_۱=a_۱$ و گذرنده از $x_۲$ قرار دارد حکم برقرار است. اکنون فرض کنید حکم برای nهای با شرط $۲\le n\le k$ درست است. پس می‌توان نقاط $x_۱,\dots,x_k$ را با $(k-۱)$ بار تا زدن به نقاط $a_۱,\dots,a_k$ تبدیل کرد. طی این عمل نقطهٔ $x_{k+۱}$ به نقطهٔ p واقع در فاصله‌ای بیش از $۲d$ با $x'_k=a_k$ تبدیل می‌شود، چون در همهٔ این تا زدن‌ها هر دو نقطهٔ x_k و $x_{k+۱}$ تا می‌خورند و در نتیجه فاصلهٔ آن‌ها تغییر نمی‌کند. در نتیجه دایرهٔ به قطر d که شامل $\{a_۱,\dots,a_n\}$ است، درون دایرهٔ به مرکز a_k و گذرنده از p قرار دارد. چنین شرایطی ایجاب می‌کند که تا زدن حول عمود منصف $\overline{a_{k+۱}p}$، که p را به $a_{k+۱}$ تبدیل می‌کند، $a_۱,\dots,a_k$ را ثابت نگاه دارد. پس همان‌طور که ادعا کردیم با k بار تا زدن توانستیم $x_۱,\dots,x_{k+۱}$ را به $a_۱,\dots,a_{k+۱}$ تبدیل کنیم.



شکل ۹: تا کردن نقاط هم‌خط به مجموعه‌ای کوچک

□

قضیه ۱۰. هر مجموعه‌ای از n نقطه، تصویر یک n–ضلعی منتظم مناسب، تحت متناهی بار تا زدن است. برایnهای زوج حداکثر $\frac{۳n-۲}{۲}$ و برای nهای فرد حداکثر $\frac{۳n-۳}{۲}$ بار تا زدن نیاز است.

اثبات. فرض کنید S مجموعهٔ n–نقطه‌ای ما باشد که درون دایرهٔ C به قطر d قرار دارد. n–ضلعی منتظم P را آن‌قدر بزرگ در نظر بگیرید که فاصلهٔ دو به دوی مجموعهٔ نقاط هم‌خط $x_۱,\dots,x_n$، تولیدشده توسط لم ۸، حداقل $۲d$ باشد. P را طوری در صفحه انتخاب کنید که $x_۱$ منطبق با یکی از اعضای S باشد. این کار به ما اجازه می‌دهد که از لم ۹ برای تبدیل کردن مجموعهٔ نقاط هم‌خط $x_۱,\dots,x_n$ به نقاط مجموعهٔ S استفاده کنیم. حال تعداد مراحل تا زدن مورد نیاز از لم‌های ۸ و ۹ به دست می‌آید؛ برای nهای زوج $\frac{n}{۲}+n-۱$ و برای nهای فرد $\frac{n-۱}{۲}+n-۱$ بار تا زدن انجام دادیم. □

شاید توجه کرده باشید که روش مورد استفاده در اثبات قضیهٔ ۱۰ می‌تواند به نتیجهٔ کلی‌تری منتهی شود. در واقع به جای P (چندضلعی منتظم) می‌توان هر مجموعهٔ R از نقاط را قرار داد. یعنی هر n نقطه در صفحه تصویر مجموعهٔ R'، متشابه با R، تحت حداکثر $۲(n-۱)$ بار تا زدن است. حداکثر $n-۱$ بار تا زدن برای رسیدن از R به مجموعه‌ای از نقاط هم‌خط و $n-۱$ بار تا زدن برای تبدیل R' به مجموعهٔ نقاط S. تنها کافیست R' نسخهٔ به اندازهٔ کافی بزرگی از R باشد.

یک مسئلهٔ حل‌نشده

برای $n = ۴,۵,۶,۷,\ldots$ حداقل چند بار تا زدن نیاز داریم تا مجموعه‌ای n-عضوی از نقاط را از یک n-ضلعی مناسب به دست آوریم؟ حالت خاص $n = ۴$ از این مسئله نیز به تنهایی جذاب و چالش برانگیز است. آیا هر چهار نقطهٔ دلخواه را با دو بار تا زدن یک مربع مناسب می‌توان به دست آورد یا مثال نقضی برای این حکم ساده وجود دارد؟