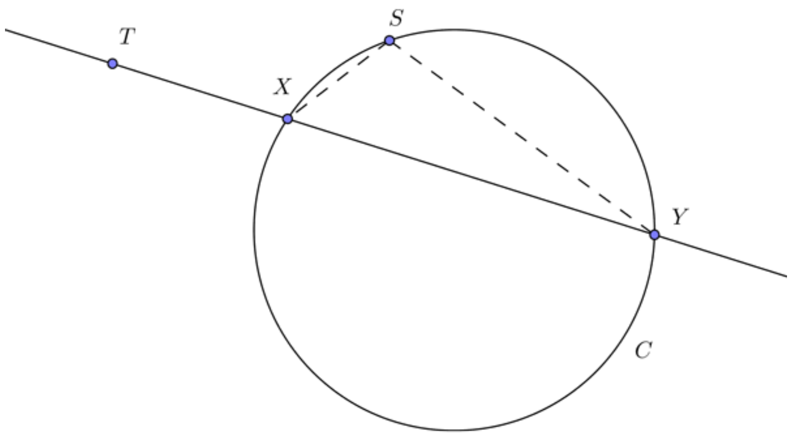
آریا حلاوتی
دانش‌پژوه المپیاد ریاضی
باشگاه دانش‌پژوهان جوان
(دبیرستان علامه حلی کرمان)

تابع و هندسه

چندی پیش در یکی از کلاس‌های درس آقای امیرحسین ضابطی، ایشان رویکرد جالبی برای حل بعضی مسائل هندسه به ما یاد دادند که آن را در این‌جا با شما در میان می‌گذارم.
ابتدا فرض کنید یک دایره داریم، مثلاً C و وتر XY روی آن. حال تابع $F : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ را روی تمام نقاط صفحه نسبت به دایرهٔ C و خط XY تعریف می‌کنیم ولی فقط با مقدار تابع برای نقاط روی دایرهٔ C و خط XY کار داریم. مقدار این تابع برای هر نقطه مانند S یا T برابر زیر است:



$$F(T) = \frac{\overline{TX}}{\overline{TY}}, \quad F(S) = \frac{SX}{SY}.$$

دقت کنید که این تابع را برای نقاط روی خط XY با استفاده از طول‌های جهت‌دار تعریف کرده‌ایم. در نتیجه اگر نقطه‌ای بیرون پاره‌خط باشد، مقدار تابع در آن عددی مثبت و اگر درون پاره‌خط باشد، عددی منفی است.
حال به اثبات چند لم می‌پردازیم:

لم ۱. اگر دو نقطه مثل A و B روی خط XY داشته باشیم به طوری که $F(A) = F(B)$، آنگاه $A \equiv B$.

اثبات. اگر علامت $F(A) = F(B)$ منفی بود، پس هر دو درون پاره‌خط XY هستند. حال واضح است که اگر نقطه‌ای که درون پاره‌خط است را به Y نزدیک کنیم، مقدار قدر مطلق تابعش زیاد می‌شود. پس این تابع درون پاره‌خط یک‌به‌یک

است که حکم را نتیجه می‌دهد. حال اگر مقدار $F(A)=F(B)$ مثبت بود، نتیجه می‌دهد که هر دو نقطه بیرون پاره‌خط هستند. پس با استدلالی مشابه حالت قبل، می‌توان به سادگی حکم را نتیجه گرفت. $\square$

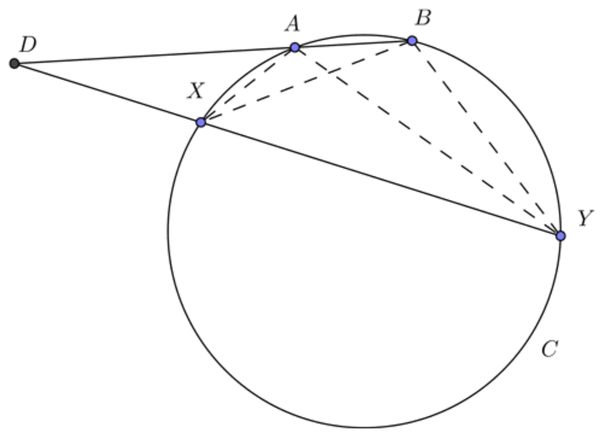
لم ۲. اگر نقاط A و B روی دایره باشند و $F(A)=F(B)$ آنگاه باید $A\equiv B$.

اثبات. اگر بدانیم که هر دو نقطه یک طرف خط XY قرار دارند، مشابه استدلال بالا می‌توان حکم را نتیجه گرفت. (چرا؟) ولی اگر ندانیم که یک طرف خط XY هستند، مشکل پیش می‌آید. برای برطرف کردن این مشکل تعریف تابع را کمی عوض می‌کنیم، به این شکل که علامت تابع را به دلخواه برای نقاط یک طرف XY منفی و برای طرف دیگر مثبت می‌گیریم. این تغییر در لم بعدی ما کاربرد کلیدی دارد. $\square$

لم ۳. اگر تابع را برای خط XY و دایره‌ی C تعریف کنیم و A و B دو نقطه روی دایره باشند و محل برخورد خط AB و XY نقطه‌ی D باشد، آنگاه داریم:

$$F(A).F(B)=F(D).$$

اثبات. حالت اول: A و B یک طرف XY باشند.



ابتدا بدون در نظر داشتن علامت تابع ثابت می‌کنیم که:

$$|F(A).F(B)|=|F(D)|.$$

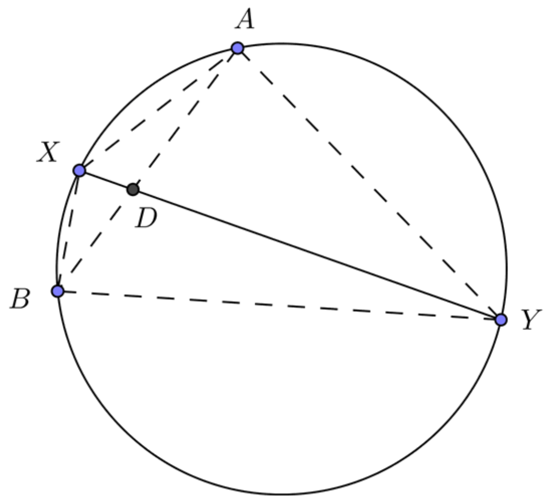
در مثلث $\overset{\triangle}{AXY}$ بر اساس قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$|F(D)|=\frac{DX}{DY}=\frac{AX}{AY}.\frac{\sin\angle XAD}{\sin\angle YAD}=\frac{AX}{AY}.\frac{\sin\angle BYX}{\sin(۱۸۰-\angle BXY)}=|F(A)|.\frac{BX}{BY}=|F(A).F(B)|.$$

پس کافیست علامت دو طرف را بررسی کنیم: در این حالت $F(A)$ و $F(B)$ هم علامتند، پس ضربشان مثبت است، یعنی $F(D)$ هم باید مثبت باشد، یعنی D باید بیرون پاره خط XY باشد، که هست و حکم در این حالت برقرار است.

حالت دوم: A و B دو طرف پاره خط XY باشند:

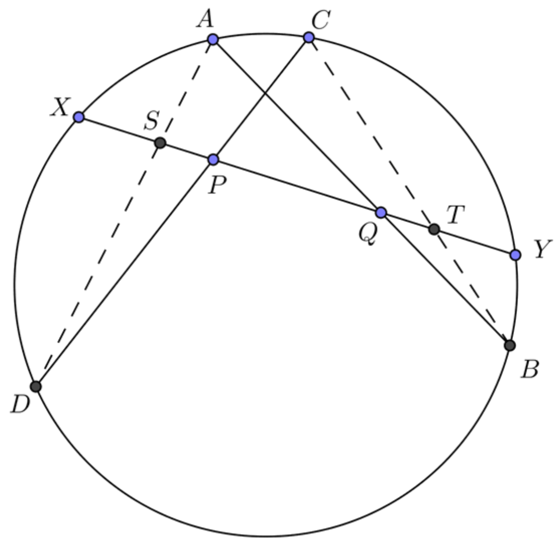
$$|F(D)|=\frac{XD}{YD}=\frac{XA}{YA}.\frac{\sin\angle XAD}{\sin\angle YAD}=\frac{XA}{YA}.\frac{\sin\angle BYX}{\sin\angle BXY}=\frac{XA}{YA}.\frac{XB}{YB}=|F(A).F(B)|.$$



چون A و B دو طرف پاره خط XY هستند، پس علامت $F(A)$ و $F(B)$ فرق می‌کند و ضربشان منفیست، پس D درون پاره خط XY است و $F(D)$ هم منفیست، که حکم ما را نتیجه می‌دهد.
حال اگر A و B روی هم باشند، یعنی خطی که از A و B رد می‌شود مماس بر دایره باشد، باز هم حکم برقرار است. می‌توانید خودتان این حکم را برای تمرین چک کنید. ($F(A)^۲ = F(D)$) $\square$

حال با استفاده از این تابع چند سؤال معروف را حل می‌کنیم تا با کاربرد آن بیشتر آشنا شوید.

سؤال ۱. دایره‌ی α و وتر XY را روی آن داریم. دو نقطه‌ی P و Q روی XY داریم به طوری که $PX = QY$ و P و Q یا هر دو درون XY هستند یا بیرون آن. وتر AB روی دایره است به طوری که از Q رد شود، همچنین وتر CD را هم روی دایره داریم به طوری که از P رد شود. اگر $(CB \cap XY) = T$,$(AD \cap XY) = S$ ثابت کنید که $SX = TY$. (قضیه‌ی پروانه)



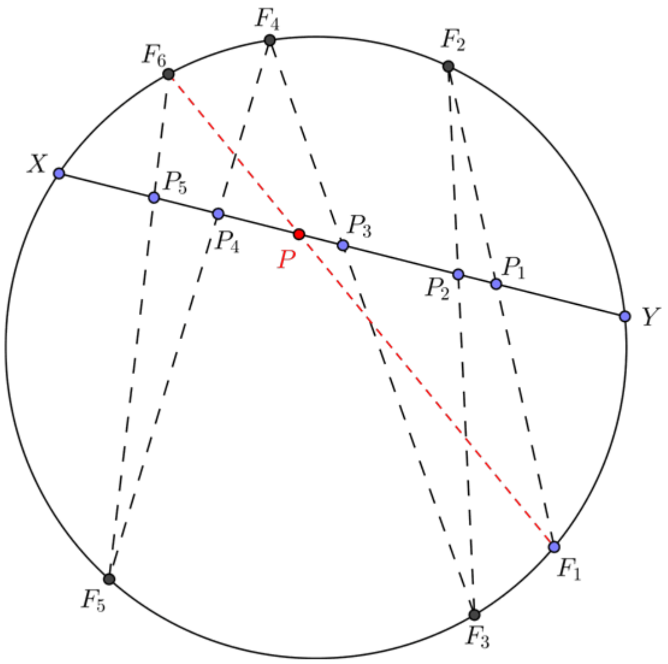
راه حل. تابع را روی دایره‌ی α و وتر XY تعریف می‌کنیم. حال چون P و Q همنوا هستند، پس می‌توان به راحتی فهمید که $F(P).F(Q) = ۱$. برای اثبات حکم کافیست ثابت کنیم که $F(S).F(T) = ۱$:

بر اساس لم ۳ داریم:

$$۱ = F(P).F(Q) = [F(C).F(D)] \,.\, [F(A).F(B)] = [F(B).F(C)] \,.\, [F(A).F(D)] = F(S).F(T).$$

دیدید که به راحتی قضیه‌ای به این پیشرفتگی را اثبات کردیم.
این سؤال جزو تمرینات کلاسی دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی در سال ۱۳۹۳ بود:

سؤال ۲. دایره‌ی α و وتر XY را روی آن داریم. روی وتر XY تعداد فردی نقطه‌ی $P_۱, P_۲, ..., P_{۲k-۱}$ داریم. نقطه‌ای دلخواه روی دایره مانند $F_۱$ داریم. $F_۱$ را به $P_۱$ وصل می‌کنیم تا دایره را برای دومین بار در $F_۲$ قطع کند. سپس $F_۲$ را به $P_۲$ وصل می‌کنیم تا دایره را برای دومین بار در $F_۳$ قطع کند و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا در آخر نقطه‌ی $F_{۲k}$ حاصل شود. حال اگر $(F_۱F_{۲k} \cap XY) = P$، ثابت کنید مکان P به مکان اولیه‌ی $F_۱$ بستگی ندارد. (سعی کنید روی سؤال ابتدا خودتان کمی فکر کنید)



راه حل. می‌توان این سؤال را با استفاده از استقرا و تعمیم قضیه‌ی پروانه هم حل کرد ولی ببینید که تابع به چه راحتی سؤال را حل می‌کند: مثلاً برای حالتی که ۵ تا نقطه داریم، تابع را نسبت به دایره‌ی α و وتر XY تعریف می‌کنیم، سپس بر اساس لم ۳ سؤال را حل می‌کنیم:

$$F(P) = F(F_۱).F(F_۶) = F(F_۱).\frac{F(P_۵)}{F(F_۵)} = F(F_۱).\frac{F(P_۵).F(F_۴)}{F(P_۴)} = \dots$$
$$= F(F_۱).\frac{F(P_۵).F(P_۳).F(F_۲)}{F(P_۴).F(P_۲)} = \frac{F(P_۵).F(P_۳).F(P_۱)}{F(P_۴).F(P_۲)}.$$

می‌بینید که مقدار $F(P)$ به محل اولیه‌ی $F_۱$ بستگی ندارد، پس بر اساس لم ۱ می‌توان فهمید که مکان P هم به محل

اولیه‌ی F_1 بستگی ندارد. برای حالت کلی هم می‌توان به راحتی همانند بالا عمل کرد و به دست آورد:

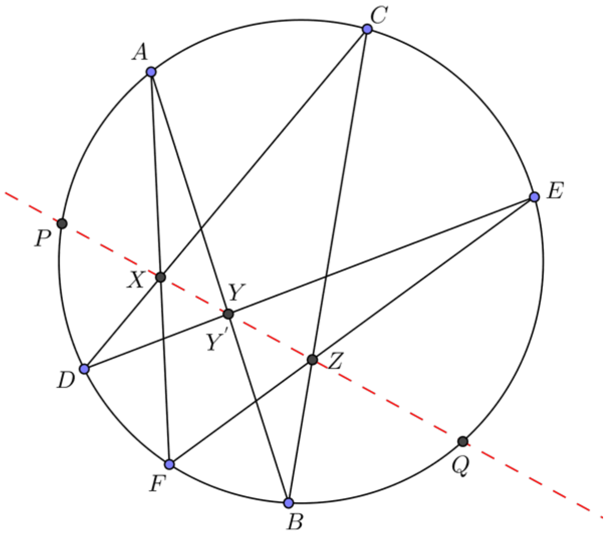
$$F(P) = \frac{\prod_{i=1}^{k} F(P_{2i-1})}{\prod_{j=1}^{k-1} F(P_{2j})}.$$

پس سؤال در حالت کلی هم اثبات می‌شود!

حالا به اثبات قضیه‌ی پاسکال می‌پردازیم:

قضیه‌ی پاسکال: در هر شش‌ضلعی محاطی محل برخورد اضلاع روبرو هم‌خطند.

اثبات. فرض کنید شش‌ضلعی $ABCDEF$ محاطی باشد. اگر $(AF \cap CD) = X$ و $(EF \cap CB) = Z$، حال باید ثابت کنیم که محل برخورد AB و DE هم روی XZ است. تابع را روی دایره و وتر PQ تعریف می‌کنیم. حال کافیست ثابت کنیم اگر $(XZ \cap AB) = Y$ و $(XZ \cap DE) = Y'$ آنگاه $Y \equiv Y'$. یا معادلاً بر اساس لم ۱، $F(Y) = F(Y')$.



بر اساس لم ۳ داریم:

$$F(X) = F(A).F(F) = F(D).F(C),$$

$$F(Z) = F(F).F(E) = F(C).F(B).$$

بر اساس ضرب دو معادله‌ی بالا داریم:

$$[F(F).F(A)] . [F(C).F(B)] = [F(F).F(E)] . [F(D).F(C)]$$
$$\Rightarrow F(A).F(B) = F(D).F(E) \Rightarrow F(Y) = F(Y') \Rightarrow Y \equiv Y'.$$

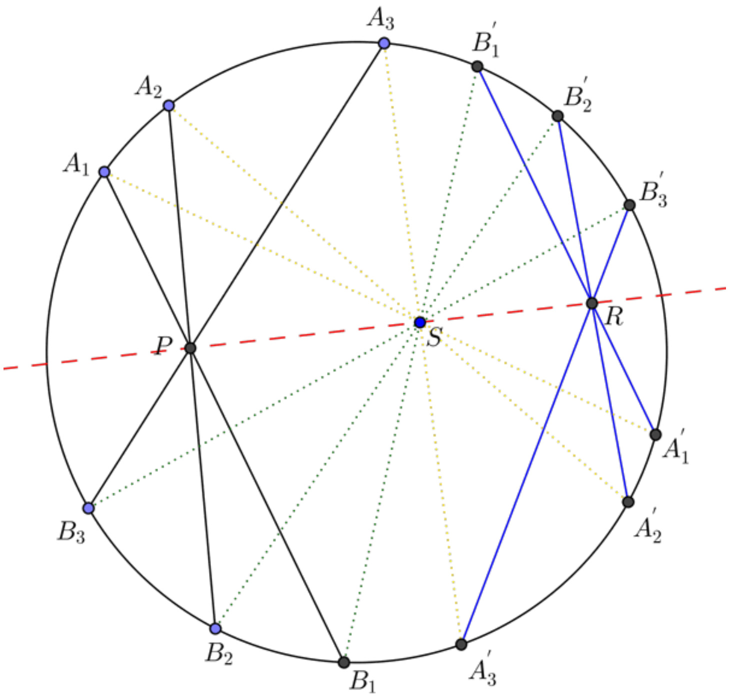
و حکم ثابت می‌شود. (البته این تکنیک فقط در حالتی است که خط هم‌خطی X, Y, Z دایره را قطع کند. در بقیه‌ی

حالات باید از روش های دیگر کمک گرفت.) □

دیدید که به کمک تابع قضیه‌ای مانند پاسکال که اثبات‌های دیگرش پیچیدگی زیادی دارند به راحتی ثابت می‌شود.

سؤال ۳. شش نقطه‌ی $A_۱, A_۲, A_۳, B_۱, B_۲, B_۳$ روی یک دایره داریم به طوری که $A_۱B_۱, A_۲B_۲, A_۳B_۳$ در نقطه‌ای مانند P درون دایره همرسند. نقطه‌ای دیگر مانند S درون دایره داریم. حال $A_۱S$ را امتداد می‌دهیم تا دایره را برای بار دوم در $A'_۱$ قطع کند. به طور مشابه برای نقاط دیگر هم همین کار را می‌کنیم تا نقاط $A'_۱, A'_۲, A'_۳, B'_۱, B'_۲, B'_۳$ حاصل شود. ثابت کنید خطوط $A'_iB'_i$ هم در نقطه‌ای مانند R همرسند به طوری که P, S, R هم‌خطند.

می‌توانید خودتان به عنوان تمرین این سؤال را به کمک تعریف تابع حل کنید.
راهنمایی. تابع را روی خط PS تعریف کنید، در واقع وتری که روی دایره ایجاد می‌کند.



تمرین‌ها

۱. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با دایره‌ی محیطی ω داده شده است. فرض کنید E و F به ترتیب پای ارتفاع وارد از B و C بر اضلاع AC و AB باشند. P محل برخورد دوم دایره‌ی محیطی مثلث $\overset{\triangle}{AEF}$ با دایره‌ی ω و H محل برخورد ارتفاع وارد از A با دایره‌ی ω است. ثابت کنید مماس‌های رسم‌شده از H و P بر دایره‌ی ω و خط BC همرسند.

۲. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با دایره‌ی محیطی ω داده شده است. فرض کنید میانه‌ی وارد از رأس A دایره را در M قطع می‌کند. G مرکز ثقل مثلث است و H پای ارتفاع وارد از A. فرض کنید HG دایره را در P و Q قطع می‌کند. (A و P یک طرف BC هستند)

الف) ثابت کنید مماس وارد بر دایره در نقاط M و P و خط BC همرسند.

*ب) اگر وسط AB و AC به ترتیب T و S باشند، ثابت کنید مماس وارد بر دایره در نقاط Q و A و خط ST همرسند.

۳. دایره‌ای به نام ω و نقطه‌ای بیرون آن مانند A داریم. از A دو خط خارج می‌کنیم تا خط اول دایره را در E و B و خط دوم دایره را در C و D قطع کند. (C بین A و D و E بین A و B است) اگر محل برخورد خطوط ED و CB نقطه‌ی P باشد و از A دو مماس AM و AN را بر دایره‌ی ω رسم کنیم، ثابت کنید M، N و P هم‌خطند.

۴. دایره‌ی ω ، وتر XY روی آن و نقطه‌ی ثابت و دلخواه P روی دایره داریم. فرض کنید نقطه M وسط پاره‌خط XY باشد. دو نقطه‌ی A و B روی پاره‌خط XY داریم به طوری که $AM = BM$. PA و PB دایره را برای دومین بار در D و C قطع می‌کنند. PM دایره را برای دومین بار در Q قطع می‌کند. ثابت کنید مماس وارد بر دایره در نقطه‌ی Q و دو پاره خط XY و CD همرسند.