سپیده اژدری
دانشجوی کارشناسی
دانشگاه صنعتی شریف
مهندسی مکانیک

رسم هفده‌ضلعی منتظم

وقتی دربارهٔ رسم یک شکل هندسی صحبت می‌شود، هدفمان رسم آن شکل به کمک خط‌کش و پرگار است، به طوری که کار خط‌کش رسم پاره‌خط واصل بین دو نقطه است و کار پرگار پیدا کردن تمام نقاطی که با نقطه‌ای مشخص فاصله‌ای مشخص دارند.
یکی از مسائل ترسیم که برای مدت‌ها ذهن ریاضیدانان را به خودش مشغول کرده بود، مسئلهٔ رسم n-ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار است. این مسئله تا مدتها پیشرفت چندانی نداشت و فقط برای حالات سادهٔ $n = 3, 4, 5, 6, 15, 2^m$ حل شده بود، تا اینکه در سال ۱۷۹۶ گاوس در ۱۹ سالگی توانست نحوهٔ رسم ۱۷-ضلعی منتظم را ارائه دهد و کمی بعد ثابت کرد که اگر $n = 2^{2^m} + 1$ و اول باشد، آنگاه n-ضلعی منتظم قابل رسم است. او همچنین ادعا کرد که اگر برای $n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k$ (p_iها اول و متمایز)، n-ضلعی منتظم قابل رسم باشد، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq k$، $p_i = 2^{2^{l_i}} + 1$.
هدف این مقاله توضیح نحوهٔ رسم ۱۷-ضلعی منتظم است. رسم این شکل بر خلاف انتظار ما که تصور می‌کنیم باید هندسی باشد، جبری است. با فرض درستی رابطهٔ $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \sin n\alpha$ می‌توان نتیجه گرفت که n ریشهٔ معادلهٔ $x^n - 1 = 0$ برابر هستند با:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; \qquad 1 \leq k \leq n.$$

با کمی بررسی می‌توان فهمید که این ریشه‌ها در صفحهٔ مختصات تشکیل n-ضلعی منتظم می‌دهند، بنابراین رسم مطلوب ما رابطهٔ نزدیکی با پیدا کردن ریشه‌های این چندجمله‌ای دارد. این چندجمله‌ای دارای یک ریشهٔ بدیهی $x = 1$ است.
برای خلاص شدن از آن، $x^n - 1$ را بر $x - 1$ تقسیم می‌کنیم. نتیجه برابر با

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$$

است که در ادامه آن را بررسی خواهیم کرد.

این مقاله ترجمه‌ای با تغییرات اندک از فصل ششم کتاب Essays on numbers and figures اثر V. V. Prasolov است که توسط انتشارات American Mathematical Society به چاپ رسیده است.

عدد مختلط $a+ib$ قابل رسم است اگر a و b قابل رسم باشند و همچنین $\sqrt{a+ib}$ قابل رسم است زیرا:

$$\sqrt{a+ib}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

بنابر آنچه گفته شد می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر u و v قابل رسم باشند، آنگاه جواب‌های معادلهٔ $x^2+ux+v=0$ قابل رسم هستند.

برای درک بهتر کاری که داریم انجام می‌دهیم، در ادامه نحوهٔ رسم ۳ و ۵-ضلعی منتظم توضیح داده شده است.

برای ۳

معادله‌ای که باید جواب‌هایش را به دست بیاوریم $x^2+x+1=0$ است و چون از درجهٔ دو است، جواب‌هایش قابل رسم است.

برای ۵:

چندجمله‌ای مورد بحثمان در این حالت $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ است، u را برابر با $x+\frac{1}{x}$ در نظر بگیرید. ریشه‌های u^2+u-1 که برابر با u_1 و u_2 می‌باشند قابل رسم هستند، بنابراین ریشه‌های x^2-u_1x+1 و x^2-u_2x+1 نیز قابل رسم هستند. به سادگی قابل بررسی است که ریشه‌های دو چندجمله‌ای آخر برابر است با ریشه‌های چندجمله‌ای $x^4+x^3+x^2+x+1$.

حال می‌توانیم برگردیم سر سؤال اصلی، رسم ۱۷-ضلعی منتظم. برای انجام این کار همان‌طور که قبلاً توضیح دادیم، باید ریشه‌های چندجمله‌ای $x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1$ را رسم کنیم.

فرض کنید $\epsilon=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$ و g ریشهٔ اولیه به پیمانهٔ ۱۷ باشد (مثل ۳)، ω_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و با گذاشتن ۳ به جای g خواهیم داشت:

$$\omega_k=\epsilon^{g^k}.$$

$$\omega_0=\epsilon,\omega_1=\epsilon^3,\omega_2=\epsilon^9,\omega_3=\epsilon^{10},\omega_4=\epsilon^{13},\omega_5=\epsilon^5,\omega_6=\epsilon^{15},\omega_7=\epsilon^{11},$$
$$\omega_8=\epsilon^{16},\omega_9=\epsilon^{14},\omega_{10}=\epsilon^8,\omega_{11}=\epsilon^7,\omega_{12}=\epsilon^4,\omega_{13}=\epsilon^{12},\omega_{14}=\epsilon^2,\omega_{15}=\epsilon^6.$$

x_1 و x_2 را اینگونه انتخاب می‌کنیم:

$$x_1=\sum_{k=0}^{7}\omega_{2k},\qquad x_2=\sum_{k=0}^{7}\omega_{2k+1}.$$

به کمک روابط ویت خواهیم داشت $x_1+x_2=-1$ و اگر $\alpha=\frac{2\pi}{17}$ باشد، به راحتی به دست می‌آید که:

$$x_1=(\epsilon+\epsilon^{16})+(\epsilon^2+\epsilon^{15})+(\epsilon^4+\epsilon^{13})+(\epsilon^8+\epsilon^9)=2(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha),$$
$$x_2=2(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha).$$

با استفاده از این فرمول:

$$2\cos(p\alpha)\cos(q\alpha)=\cos((p+q)\alpha)+\cos((p-q)\alpha),$$

خواهیم داشت:

$$x_1x_2 = 8(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha) = 4(x_1 + x_2) = -4.$$

بنابراین خواهیم داشت که x_1 و x_2 دو ریشهٔ چندجمله‌ای درجهٔ دوم $x^2 + x - 4$ می‌باشند و به خاطر اینکه ضرایب این چندجمله‌ای اعداد صحیح است، پس ریشه‌های آن قابل رسم هستند.

حال y_1 و y_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k} = 2(\cos\alpha + \cos 4\alpha),$$
$$y_2 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k+2} = 2(\cos 8\alpha + \cos 2\alpha).$$

به راحتی قابل بررسی است که:

$$y_1 + y_2 = x_1,$$
$$y_1y_2 = 2(\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos 7\alpha + \cos 8\alpha) = x_1 + x_2 = -1.$$

پس y_1 و y_2 ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ دوم $y^2 - x_1y - 1$ هستند. به طریق مشابه داریم:

$$y_3 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k+1} = 2(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha),$$
$$y_4 = \sum_{k=0}^{3} \omega_{4k+3} = 2(\cos 7\alpha + \cos 6\alpha).$$

و اینکه y_3 و y_4 ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ دوم $y^2 - x_2y - 1$ می‌باشند. از آنجایی که x_1 و x_2 قابل رسم هستند، پس y_1، y_2، y_3 و y_4 نیز قابل رسم هستند.

و در آخر z_1 و z_2 را بدین‌گونه در نظر می‌گیریم:

$$z_1 = \omega_0 + \omega_8 = 2\cos\alpha,\ z_2 = \omega_4 + \omega_{12} = 2\cos 4\alpha.$$

به وضوح خواهیم داشت که $z_1z_2 = 2(\cos 5\alpha + \cos 3\alpha) = y_3$ و $z_1 + z_2 = y_1$، بنابراین ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ دوم $z^2 - y_1z + y_3$ برابر با z_1 و z_2 است و از آنجایی که ضرایب چندجمله‌ای قابل رسم است، پس ریشه‌های آن را نیز می‌توانیم رسم کنیم.

وقتی بتوانیم z_1 را رسم کنیم پس ϵ را نیز می‌توانیم رسم کنیم، زیرا:

$$\epsilon = \frac{z_1}{2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{z_1}{2}\right)^2}.$$

بقیهٔ ریشه‌ها نیز برابر با $\epsilon^2, \epsilon^3, \ldots, \epsilon^{17}$ هستند که چون ϵ قابل رسم است، پس این‌ها نیز قابل رسم هستند. با رسم ریشه‌ها توانستیم ۱۷-ضلعی منتظم را رسم کنیم.