مصطفی عین‌اله‌زاده
دانشجوی دکتری ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

قضیهٔ پونسله

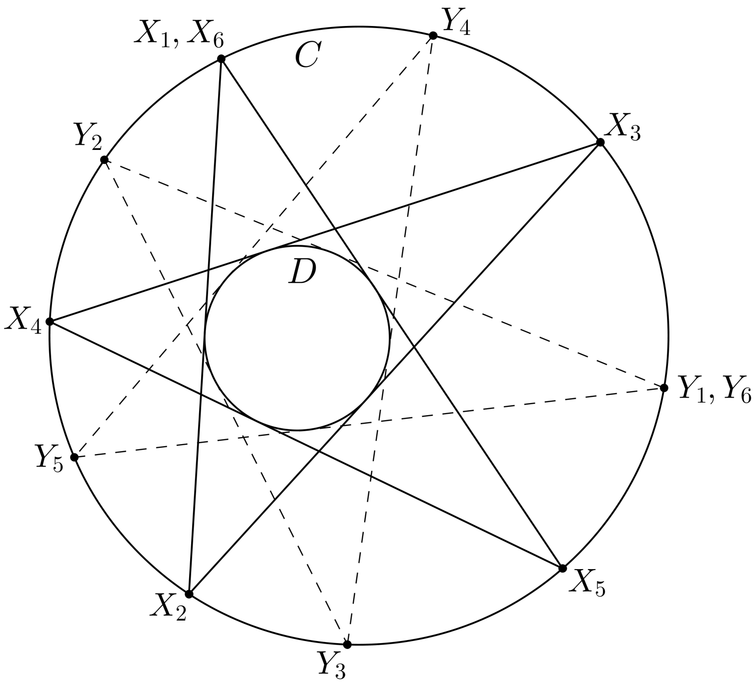
۱ معرفی

دایرهٔ C و دایرهٔ D در درون آن و نقطهٔ X_1 روی C داده شده است. از X_1 مماسی بر D رسم می‌کنیم تا C را در نقطهٔ دیگر X_2 قطع کند. سپس از X_2 مماس دیگری (غیر از X_1X_2) بر D رسم می‌کنیم تا C را در نقطهٔ دیگر X_3 قطع کند. به همین ترتیب X_4، X_5، ... را می‌سازیم. اگر در این روند با نقطه‌ای تکراری مواجه شویم، اولین نقطه‌ای که تکرار می‌شود باید X_1 باشد، پس عدد طبیعی n وجود دارد که $X_{n+1} = X_1$ و $X_1X_2\cdots X_n$ یک n-ضلعی محاط در C و محیط بر D به ما می‌دهد.(شکل ۱) به وضوح این اتفاقی بسیار نادر است و در این‌صورت C، D و X_1 باید رابطه‌ای خاص با هم داشته باشند! اما حقیقتی بسیار عجیب‌تر به ما می‌گوید که X_1 در این رابطه هیچ نقشی ندارد. به عبارت دیگر، اگر این روند را به جای X_1 از هر نقطهٔ دیگری از C شروع کنیم، پس از n مرحله به جای اول برمی‌گردیم.

قضیهٔ پونسله. اگر یک n-ضلعی محاط در دایرهٔ C و محیط بر دایرهٔ D وجود داشته باشد، بی‌نهایت n-ضلعی با این خاصیت وجود دارد. در واقع هر نقطهٔ C، رأس یکی از این n-ضلعی‌هاست.

این قضیه را جوانی به نام ژان ویکتور پونسله [1] در زندان (پس از زندانی شدن توسط روس‌ها در جریان یکی از جنگ‌های ناپلئون) کشف و اثبات کرد. او که بعدها به عنوان یکی از بزرگترین هندسه‌دانان قرن نوزدهم لقب گرفت، بعد از آزادی و بازگشت به وطن، کتابی در باب هندسهٔ تصویری نوشت و در آن تعمیمی از این قضیه را برای

[1] Jean Victor Poncelet(1788-1867)



شکل ۱: $n = ۵$

حالت کلی‌تر دو مقطع مخروطی،[۲] منتشر کرد. این قضیه یکی از زیباترین قضایای هندسهٔ مقاطع مخروطی به حساب می‌آید و ریاضیدانان بسیاری مانند ژاکوبی، کیلی، گریفیث و ... برای یافتن اثبات‌ها و تعمیم‌های متنوعی از آن تلاش کرده‌اند.

در حال حاضر اثبات‌هایی با استفاده از روش‌های پیشرفتهٔ تحلیلی و جبری برای قضیهٔ پونسله وجود دارد. اما جالب توجه این است که اثبات خود پونسله با استفاده از قضایای مقدماتی هندسه قابل بیان است. در این مقاله قصد داریم تا اثباتی مشابه اثبات اصلی پونسله، ارائه کنیم. این اثبات از مفهوم دسته‌های دوایر هم‌محور استفاده می‌کند. به همین جهت این مفهوم در قسمت اول مقاله معرفی و خواص اصلی آن مرور شده است. این قسمت بسیار مقدماتی است و مطلب جدیدی برای کسانی که با دوایر هم‌محور آشنا هستند، دربرندارد. در قسمت بعد، اثبات قضیهٔ پونسله برای دایره‌ها کامل می‌شود. در این قسمت نیز فقط از بعضی از مطالب هندسهٔ دبیرستانی استفاده کرده‌ایم. در قسمت چهارم مقاله اصل دوگانی در هندسه‌ی تصویری معرفی شده و با استفاده از آن نتیجه‌ای جالب راجع به چندضلعی‌های محیطی-محاطی به دست آمده است. مطالب این بخش جنبهٔ توصیفی دارند و در بعضی از موارد اثباتی برای گزاره‌های آن ارائه نشده است.

تمارین لابلای متن اغلب بسیار ساده هستند، ولی در عین حال فکر کردن روی آنها به فهم مطالب کمک زیادی می‌کند. در مورد مسائل پایانی هم باید گفت که بعضی از آنها ممکن است بسیار سخت باشند!

امیدواریم این مقاله مورد توجه مخاطبان ارجمند مجلهٔ پرگار قرار گیرد.

[۲] دایره، بیضی، هذلولی و یا سهمی

نمادگذاری

$\mathrm{C}(O,R)$ دایرهٔ به مرکز O و شعاع R

$\mathrm{P}(A,C)$ قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ C (تعریف ۱ را ببینید.)

$|AB|$ طول علامت‌دار پاره‌خط AB

(فرض کنید یک جهت برای خط گذرنده از A و B تعیین شده باشد. طول جهت‌دار پاره‌خط AB، عددی حقیقی است که قدرمطلق آن برابر طول این پاره‌خط است و علامت آن بسته به اینکه جهت خط از A به B و یا برعکس باشد، مثبت و یا منفی است. به وضوح برای معنی‌دار بودن این تعریف، باید جهتی مشخص روی این خط تعیین کرد. اما در حالت‌هایی که با حاصل ضرب و تقسیم تعداد زوجی از پاره‌خط‌ها روی یک خط سروکار داریم، علامت عبارت حاصل مستقل از جهت تعیین شده برای خط است و عددی خوش‌تعریف، حتی برای خطوطی که جهتی روی آن‌ها تعیین نشده است به ما می‌دهد. ضمناً در جاهایی که از نماد AB بدون | | برای نمایش طول استفاده می‌کنیم، منظورمان همان طول معمولی است.)

۲ دسته‌های دوایر هم‌محور

در این بخش می‌خواهیم بعضی از مفاهیم اساسی مرتبط با دایره‌ها و دسته‌های دوایر را با استفاده از روش تحلیلی معرفی کنیم. این روش، اثبات بعضی از گزاره‌ها و قضایا را ساده‌تر می‌کند و علاوه بر این به سادگی به حالت‌های کلی‌تر مقاطع مخروطی دلخواه تعمیم‌پذیر است.[۳] برای مشاهدهٔ روش‌های هندسی‌تر بررسی مسائل مرتبط با دایره‌ها، می‌توانید فصل هشتم کتاب کورت[۱] را ببینید.
همان‌طور که می‌دانیم، برای هر نقطهٔ دلخواه $O=(a,b)$ در صفحه و عدد مثبت R، مختصات x و y نقاط دایرهٔ $\mathrm{C}(O,R)$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}-R^{۲}=۰.$$

به این معادله، معادلهٔ استاندارد دایرهٔ $\mathrm{C}(O,R)$ و به چندجمله‌ای سمت چپ معادله، چندجمله‌ای استاندارد $\mathrm{C}(O,R)$ می‌گوییم. اگر این چندجمله‌ای را با $f(x,y)$ نمایش دهیم، با بسط آن داریم:

$$f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}-۲ax-۲by+a^{۲}+b^{۲}-R^{۲}.$$

به وضوح برای هر عدد $c\neq ۰$، جواب‌های معادلهٔ $cf(x,y)=۰$ با جواب‌های معادلهٔ $f(x,y)=۰$ یکسان است و

[۳] برای آشنایی با دسته‌های مقاطع مخروطی، منبع [۳] را پیشنهاد می‌کنیم.

هر دو یک دایره را توصیف می‌کنند. از طرف دیگر قسمت درجهٔ ۲ در چندجمله‌ای $cf(x,y)$ برابر $cx^۲+cy^۲$ است. به راحتی می‌توان دید که صفرهای یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ دومتغیره که جملات درجهٔ ۲ آن به صورت $cx^۲+cy^۲$ $(c\neq ۰)$ باشد، یک دایره یا یک نقطه و یا مجموعهٔ تهی است.

تمرین ۱. چندجمله‌ای $f(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $Q=a^۲+b^۲-۴c$. نشان دهید:

الف) اگر $Q>۰$، مجموعهٔ جواب‌های $f(x,y)=۰$ دایره‌ای به مرکز $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ و شعاع $\frac{\sqrt{Q}}{۲}$ است.

ب) اگر $Q=۰$ مجموعهٔ جواب‌های $f(x,y)=۰$ تنها شامل یک نقطه است.

ج) اگر $Q<۰$، معادله‌ی $f(x,y)=۰$ جواب ندارد.

تعریف ۱. قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ $\mathrm{C}(O,R)$ برابر با مقدار عبارت $PO^۲-R^۲$ است.

همان‌طور که دیدیم چندجمله‌ای استاندارد دایرهٔ $\mathrm{C}(O,R)$ برابر با $|(x,y)O|^۲-R^۲$ است. پس قوت هر نقطه در صفحه نسبت به $\mathrm{C}(O,R)$ برابر با مقدار چندجمله‌ای استاندارد $\mathrm{C}(O,R)$ در آن نقطه است. علاوه بر این بنابر تعریف بالا، قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ C، در صورتی که P درون، بیرون و یا روی C باشد، به ترتیب عددی منفی، مثبت و یا برابر صفر است.

گزاره ۱. اگر از نقطهٔ P خط دلخواهی رسم کنیم تا دایرهٔ $C=\mathrm{C}(O,R)$ را در نقاط A و B قطع کند، در این‌صورت مقدار (علامت‌دار) $|PA||PB|$ برابر با قوت P نسبت به $\mathrm{C}(O,R)$ است.

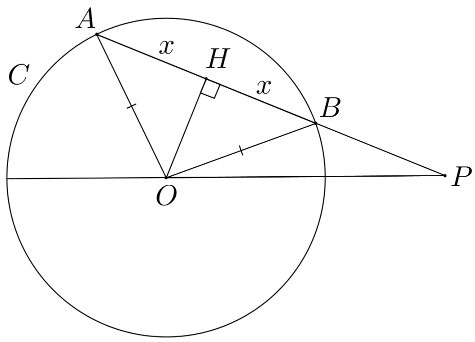
اثبات. فرض کنید H پای عمود رسم شده از O بر خط AB باشد.(شکل ۲) با توجه به هم‌فاصله بودن O از A و B، H وسط پاره‌خط AB است و $x:=|BH|=|HA|$. بنابراین با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ PHO و AHO داریم:

$$\begin{aligned}|PA||PB| &= (|PH|+x)(|PH|-x) = PH^۲-x^۲\\ &= (PO^۲-OH^۲)-(AO^۲-OH^۲)\\ &= PO^۲-R^۲ = \mathrm{P}(P,C).\end{aligned}$$

□

تعریف ۲. محور اصلی دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ در صفحه، مکان هندسی نقاطی است که قوت آنها نسبت به $C_۱$ و $C_۲$ برابر باشد.

فرض کنید $f_۱$ و $f_۲$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های استاندارد دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ باشند. دراین‌صورت اگر معادلهٔ $f_۱$ و



شکل ۲: گزارهٔ ۱

f_2 به صورت زیر باشد:

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$f_2(x,y) = x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2.$$

نقاط محور اصلی C_1 و C_2 با معادلهٔ

$$f_1(x,y) = f_2(x,y) \iff (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0.$$

داده می‌شود که در حالت $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ معادلهٔ یک خط است. تساوی (a_1, b_1) و (a_2, b_2) معادل با هم‌مرکز بودن C_1 و C_2 است و در این حالت معادلهٔ بالا جواب ندارد. بعضی وقت‌ها برای اینکه نیاز به حالت‌گیری اضافی نباشد، محور اصلی دو دایرهٔ هم‌مرکز را "خط بی‌نهایت" در نظر می‌گیرند. پس با این قرارداد محور اصلی دو دایره همواره یک خط است.

تمرین ۲. نشان دهید محور اصلی دو دایره بر خط‌المرکزین آنها عمود است و از نقاط مشترک آنها (در صورت وجود) می‌گذرد. بنابراین محور اصلی دو دایرهٔ متقاطع خط گذرنده از نقاط تقاطع آنها و محور اصلی دو دایرهٔ مماس بر هم، مماس مشترک گذرنده از محل تماس آنهاست.

در حالت کلی‌تر اگر برای هر دو عدد دلخواه α_1 و α_2 (که توأماً صفر نیستند) معادلهٔ

$$\alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y) = 0$$

را بسط دهیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(\alpha_1+\alpha_2)(x^2+y^2)+(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2)x+(\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2)y+(\alpha_1 c_1+\alpha_2 c_2)=0.$$

اگر این معادله جواب داشته باشد، جواب‌های آن یک دایره یا یک نقطه و یا یک خط (در حالت $\alpha_1+\alpha_2=0$) است.
به همهٔ اشکالی که به این صورت به دست می‌آیند، دستهٔ دوایر هم‌محور با C_1 و C_2 می‌گویند. (نقاط را می‌توان دوایر با شعاع صفر و خطوط را می‌توان دوایر با شعاع بی‌نهایت در نظر گرفت. پس همهٔ اعضای یک دسته از دوایر هم‌محور، یک "دایرهٔ تعمیم‌یافته" هستند!)

گزاره ۲. مکان هندسی نقاطی در صفحه که نسبت قوت آن به دایرهٔ C_1 به قوتش به دایرهٔ C_2 برابر با مقدار ثابت α باشد، دایره‌ای (تعمیم‌یافته) هم‌دسته با C_1 و C_2 است.

اثبات. فرض کنیم C_1 و C_2 به ترتیب با معادله‌های استاندارد $f_1=0$ و $f_2=0$ داده شده‌اند. پس مکان هندسی مذکور با معادلهٔ

$$f_1(x,y)=\alpha f_2(x,y)$$

داده می‌شود که بنابر تعریف، در صورت ناتهی بودن، دایره‌ای هم‌دسته با C_1 و C_2 است. $\square$

تمرین ۳. فرض کنید $\mathscr{F}$ دستهٔ دوایر هم‌محور با دو دایرهٔ متفاوت C_1 و C_2 باشد. نشان دهید:

الف) برای هر دو دایرهٔ D_1 و D_2 در $\mathscr{F}$، دستهٔ دوایر هم‌محور با D_1 و D_2 برابر با $\mathscr{F}$ است.

ب) اگر C_1 و C_2 هم‌مرکز نباشند، $\mathscr{F}$ شامل دقیقاً یک خط است که محور اصلی هر دو دایره در $\mathscr{F}$ است. (به این خط محور اصلی $\mathscr{F}$ می‌گوییم.)

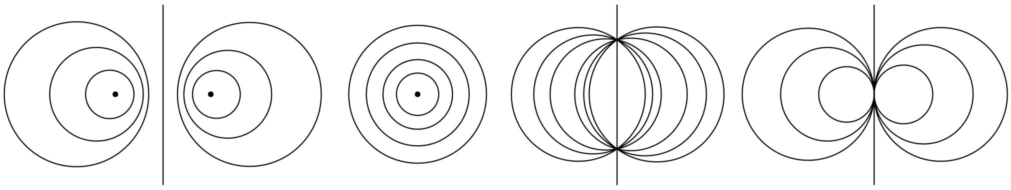
ج) دایرهٔ C در $\mathscr{F}$ قرار دارد اگر و فقط اگر محور اصلی آن و C_1 برابر با محور اصلی C_1 و C_2 باشد. (این گزاره وجه تسمیهٔ "دستهٔ دوایر هم‌محور" را روشن می‌کند و در واقع تعریفی معادل با تعریف ما از این مفهوم است.)

د) مرکز همهٔ دوایر $\mathscr{F}$ روی خطی عمود بر محور اصلی $\mathscr{F}$ قرار دارد.

تمرین ۴. فرض کنید معادلات درجهٔ دوِ $f_1(x,y)=0$ و $f_2(x,y)=0$ دوایر متفاوت C_1 و C_2 را معین کنند. نشان دهید:

الف) نشان دهید دو معادلهٔ $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2=0$ و $\beta_1 f_1+\beta_2 f_2=0$ یک دایرهٔ (تعمیم‌یافته) یکسان را نمایش می‌دهند اگر و فقط اگر $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}$.

ب) هر نقطهٔ P غیر از تقاطع‌های C_1 و C_2، روی دایرهٔ یکتایی در دستهٔ دوایر هم‌محور با C_1 و C_2 قرار دارد.



شکل ۳: انواع دسته‌های دوایر در گزارهٔ ۳

گزاره ۳. چهار نوع از دسته‌های دوایر هم‌محور وجود دارد:

اول – دوایر (و خط) گذرنده از دو نقطه،

دوم – دوایر مماس بر یک خط در نقطه‌ای معین از آن و خود آن خط،

سوم – دوایر به مرکز یک نقطه،

چهارم – دوایری که نسبت فواصل نقاط آن به دو نقطهٔ خاص، مقداری ثابت است و خط عمودمنصف این دو نقطه.

اثبات. فرض کنید $\mathscr{F}$ دستهٔ دوایر هم‌محور با دو دایرهٔ C_1 و C_2 باشد. C_1 و C_2 چهار حالت نسبت به یکدیگر دارند که به ترتیب آنها را بررسی می‌کنیم:

الف) C_1 و C_2 در دو نقطهٔ A و B متقاطعند.

با توجه به تعریف، به وضوح همهٔ دوایر هم‌دسته با C_1 و C_2 از A و B می‌گذرند. بالعکس فرض کنید دایرهٔ C از A و B و نقطهٔ دیگری مانند P بگذرد. بنابر قسمت (ب) از تمرین قبل، دایرهٔ یکتایی مانند $\widetilde{C}$ در $\mathscr{F}$ وجود دارد که از P می‌گذرد. اما A و B هم روی $\widetilde{C}$ قرار دارند. پس $\widetilde{C}$ بر C منطبق است و نتیجتاً $\mathscr{F}$ برابر با مجموعهٔ همهٔ دوایر (و خط) گذرنده از A و B است.

ب) C_1 و C_2 در نقطهٔ A بر یکدیگر مماسند.

اگر مماس مشترک C_1 و C_2 در A را با l نمایش دهیم، هر دایرهٔ $\mathscr{F}$ از A می‌گذرد و مرکزش روی خط‌المرکزین C_1 و C_2 که در A بر l عمود است، قرار دارد. پس همهٔ دوایر $\mathscr{F}$ در A بر l مماسند. استدلالی مشابه با حالت قبل نشان می‌دهد که عکس این مطلب نیز درست است.

ج) C_1 و C_2 هم‌مرکز با مرکزیت نقطهٔ O هستند.

در این حالت با توجه به معادلهٔ جبری این دو دایره به سادگی می‌توان دید که مرکز همهٔ دوایر $\mathscr{F}$ برابر با O است و عکس این مطلب نیز صحیح است.

د) C_1 و C_2 مجزا و غیر هم‌مرکز هستند.

فرض کنید l محور اصلی C_1 و C_2، خط‌المرکزین آن‌دو به نام m را در P قطع کند. با توجه به اینکه l، C_1 را قطع نمی‌کند، (چون در غیر این‌صورت نقطهٔ تقاطع آنها روی C_2 هم می‌افتد) P بیرون C_1 قرار دارد و قوت آن نسبت به C_1 مثبت است. دو نقطهٔ X و Y را روی m به گونه‌ای انتخاب کنید که

$$|PX|^2 = |PY|^2 = \mathrm{P}(P, C_1).$$

فرض کنید C دایره‌ای در $\mathscr{F}$ باشد که از X می‌گذرد. با توجه به اینکه l محوراصلی C و C_1 نیز هست و $P \in l$،

$$\mathrm{P}(P, C) = \mathrm{P}(P, C_1) = |PX|^2.$$

پس چون $X \in C$، C بر $m = PX$ در X مماس است. از طرف دیگر مرکز C روی m قرار دارد، پس C برابر با تک‌نقطهٔ X است. به همین ترتیب نقطهٔ Y هم در $\mathscr{F}$ قرار دارد. پس $\mathscr{F}$ برابر با دستهٔ دوایر هم‌محور با X و Y است. با توجه به اینکه قوت نسبت به یک نقطه برابر با مجذور فاصله از آن نقطه است، گزارهٔ ۲ به ما می‌گوید که دوایر (و خط) $\mathscr{F}$ مکان هندسی نقاطی هستند که نسبت فاصلهٔ آنها به X و Y برابر با مقداری ثابت است. □

تمرین ۵. فرض کنید $\mathscr{F}$ یک دستهٔ دوایر از نوع چهارم باشد. نشان دهید هر وتر از هر یک از دوایر $\mathscr{F}$، در دقیقاً یک نقطه بر دایره‌ای دیگر در $\mathscr{F}$ مماس است.

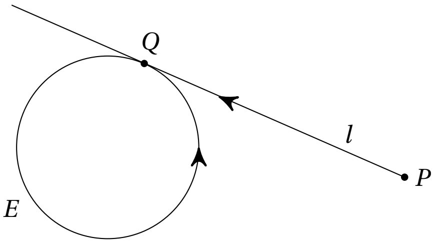
۳ اثبات قضیه

قبل از شروع به اثبات قضیهٔ پونسله، نکاتی دربارهٔ دوایر جهت‌دار متذکر می‌شویم. هر دایره در صفحه را می‌توان به دو صورت ساعت‌گرد و یا پادساعت‌گرد جهت‌دهی کرد. به یک دایره که جهتی روی آن مشخص شده است، دایره‌ی جهت‌دار می‌گوییم. می‌گوییم خط جهت‌دار AB[۴] بر دایرهٔ جهت‌دار E مماس است اگر علاوه بر مماس بودن، جهت خط و جهت دایره در محل تماس یکسان باشد. ضمناً برای نقطهٔ دلخواه P بیرون E، منظور از مماس هم‌جهت رسم شده از P بر E، یکی از مماس‌های رسم‌شده (با نام l) از P بر E است که اگر محل تماس l و E را با Q نام‌گذاری کنیم، جهت خط PQ با جهت E در Q یکسان باشد.(شکل ۴)
در سراسر این بخش C یک دایره و D دایرهٔ دیگری درون آن است.

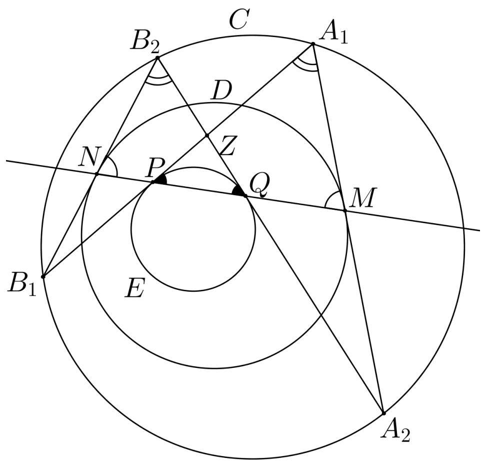
لم ۱. چهار نقطهٔ A_1، A_2، B_1 و B_2 روی دایرهٔ C به گونه‌ای قرار دارند که A_1A_2 و B_1B_2 در یک جهت بر D مماسند. در این صورت:

الف) دایرهٔ E درون C و هم‌محور با C و D وجود دارد که A_1B_1 و A_2B_2 در یک جهت بر آن مماسند.

[۴] یعنی خط گذرنده از AB که جهتش از A به سمت B است.



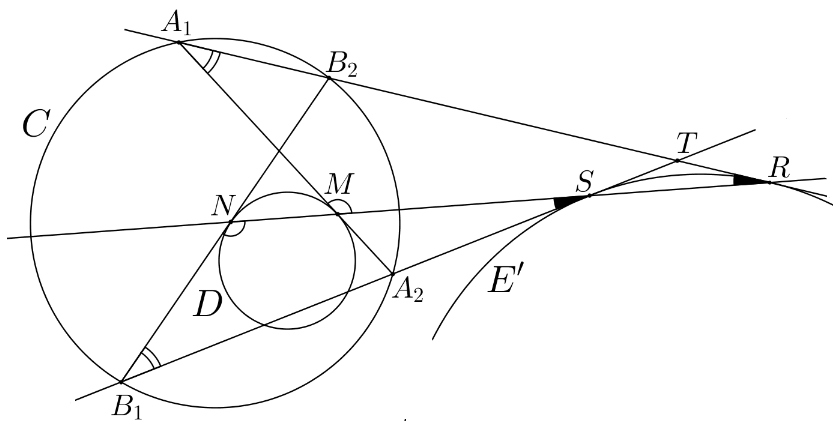
شکل ۴: مماس هم‌جهت



شکل ۵: لم ۱ (الف)

ب) دایرهٔ جهت‌دار E' بیرون C و هم‌محور با C و D وجود دارد که B_1 و B_2 به ترتیب روی مماس‌های هم‌جهت رسم‌شده از A_1 و A_2 بر E' قرار دارند.

اثبات. الف) محل تماس A_1A_2 و B_1B_2 بر D را با M و N، تقاطع خط MN با دو خط A_1B_1 و A_2B_2 را با P و Q و تقاطع دو خط A_1B_1 و A_2B_2 را با Z نام‌گذاری می‌کنیم. (شکل ۵) ابتدا توجه کنید که به دلیل اینکه A_1A_2 و B_1B_2 هر دو در یک جهت بر D مماسند، A_1 و B_2 در یک طرف خط MN قرار دارند و زوایای $\angle A_1MN$ و $\angle B_2NM$ برابرند. از طرف دیگر دو زاویهٔ $\angle MA_1P$ و $\angle NB_2Q$ هم روبرو به کمان $\widehat{A_2B_1}$ هستند و مساوی‌اند. پس دو مثلث MA_1P و NB_2Q متشابه‌اند و $\angle NQB_2 = \angle MPA_1$. در نتیجه مثلث ZPQ متساوی‌الساقین است و $ZP = ZQ$. پس دایرهٔ E وجود دارد که در P و Q بر A_1B_1 و A_2B_2 مماس است. از طرف دیگر توجه کنید که A_1 و A_2 در دو طرف خط PQ قرار دارند، (چون PQ، A_1A_2 را در درون پاره‌خط A_1A_2 یعنی M قطع می‌کند.) پس A_1B_1 و A_2B_2 در یک جهت بر E مماسند. ادعا می‌کنیم که E با C و D هم‌محور است. برای این کار کافیست نشان دهیم نسبت قوت نقاط A_1، A_2، B_1 و B_2 به D و E یکسان است. زیرا در این‌صورت بنابر گزارهٔ ۲ نتیجه می‌شود که دایرهٔ گذرنده از این چهارنقطه (که حداقل ۳تای آنها متمایزند) یعنی C هم‌محور با D و E است و ادعای ما ثابت می‌شود.



شکل ۶: لم ۱ (ب)

با استفاده از مماس‌های موجود و تشابه دو مثلث $A_۱MP$ و $B_۲NQ$، داریم:

$$\frac{\mathrm{P}(A_۱,D)}{\mathrm{P}(A_۱,E)}=\frac{A_۱M^۲}{A_۱P^۲}=\frac{B_۲N^۲}{B_۲Q^۲}=\frac{\mathrm{P}(B_۲,D)}{\mathrm{P}(B_۲,E)}.$$

به طریق مشابه بنابر تشابه دو مثلث $A_۲MQ$ و $B_۱NP$:

$$\frac{\mathrm{P}(A_۲,D)}{\mathrm{P}(A_۲,E)}=\frac{A_۲M^۲}{A_۲Q^۲}=\frac{B_۱N^۲}{B_۱P^۲}=\frac{\mathrm{P}(B_۱,D)}{\mathrm{P}(B_۱,E)}.$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ سینوس‌ها در دو مثلث $A_۱MP$ و $A_۲MQ$ داریم:

$$\frac{A_۱M}{A_۱P}=\frac{\sin\angle A_۱PM}{\sin\angle A_۱MP}=\frac{\sin\angle A_۲QM}{\sin\angle A_۲MQ}=\frac{A_۲M}{A_۲Q}\implies\frac{\mathrm{P}(A_۱,D)}{\mathrm{P}(A_۱,E)}=\frac{\mathrm{P}(A_۲,D)}{\mathrm{P}(A_۲,E)}.$$

ترکیب ۳ رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که نسبت قوت‌های هر چهارنقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، $B_۱$ و $B_۲$ نسبت به D و E یکسان است.

ب) تقاطع MN و دو خط $A_۱B_۲$ و $A_۲B_۱$ را با R و S و تقاطع $A_۱B_۲$ و $A_۲B_۱$ را با T نمایش می‌دهیم. (شکل ۶) مشابه قسمت قبل با استفاده از تشابه مثلث‌های $A_۱MR$ و $B_۱NS$ تساوی زوایای $\angle TSR$ و $\angle TRS$ نتیجه می‌شود. در نتیجه دایرهٔ E' وجود دارد که در R و S بر $A_۱B_۲$ و $A_۲B_۱$ مماس است. از آنجایی که $A_۱$ و $A_۲$ در دو طرف RS قرار دارند، $A_۱R$ و $A_۲S$ در یک جهت بر E' مماسند. (همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، $A_۱B_۲$ و $A_۲B_۱$ لزوماً در یک جهت بر E' مماس نیستند. البته در بعضی از حالات ممکن است چنین باشد.) در ادامه نیز مشابه قسمت قبل می‌توان نشان داد که نسبت قوت‌های $A_۱$، $A_۲$، $B_۱$ و $B_۲$ به دو دایرهٔ D و E' یکسان است و به این ترتیب هم‌محور بودن این سه دایره نتیجه می‌شود. ضمناً از آنجایی که $A_۱$ و $B_۲$ در یک طرف خط MN قرار دارند، R بیرون پاره‌خط $A_۱B_۲$ است و دایره‌ی E' بیرون C قرار دارد. □

لم ۲. فرض کنید $A_1, A_2, \ldots$ و $B_1, B_2, \ldots$ دو دنباله از نقاط C باشند، به طوری که خطوط جهت‌دار A_1A_2، A_2A_3، … و B_1B_2، B_2B_3، … همگی در یک جهت یکسان بر D مماسند. در این‌صورت دایره‌ای درون C و هم‌محور با C و D، مانند E وجود دارد که A_iB_i ها همگی در یک جهت بر E مماسند.

اثبات. ابتدا توجه کنید که برای هر وتر C، دایرهٔ یکتایی درون C و هم‌محور با C و D وجود دارد که بر این وتر مماس است. حال اگر لم قبل را برای چهارتایی‌های A_i، A_{i+1}، B_i و B_{i+1} به کار ببریم، نتیجه می‌شود که دایرهٔ E_i درون C و هم‌محور با C و D وجود دارد که A_iB_i و $A_{i+1}B_{i+1}$ در یک جهت بر آن مماسند. اما E_i و E_{i+1} هر دو بر A_iB_i مماس هستند، در نتیجه‌ای با توجه به یکتایی‌ای که به آن اشاره شد، برای هر i، $E_i = E_{i+1}$. پس همهٔ E_iها برابر با یک دایرهٔ E درون C و هم‌محور با C و D هستند و حکم ثابت می‌شود. □

و حالا می‌توانیم قضیهٔ پونسله را برای دو دایرهٔ درون هم ثابت کنیم:

اثبات قضیهٔ پونسله.[۵] فرض کنید $n \geq ۳$ و $A_1, A_2, \ldots, A_n$، n نقطهٔ متمایز روی C هستند که وترهای A_1A_2، A_2A_3، …، A_nA_1 بر D مماسند. در نتیجه با توجه به متمایز بودن A_iها، همگی این وترهای جهت‌دار در جهت یکسانی بر D مماس هستند. D را با همین جهت جهت‌دهی می‌کنیم. حال فرض کنید B_1 نقطه‌ای دلخواه روی C باشد. از B_1 مماسی هم‌جهت بر D رسم می‌کنیم تا C را در B_2 قطع کند، به همین ترتیب B_3، B_4، … را هر کدام به وسیلهٔ نقطهٔ قبلی‌اش تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم $B_1 = B_{n+1}$. اگر A_{n+1} را برابر با A_1 تعریف کنیم، دو دنبالهٔ $A_1, \ldots, A_{n+1}$ و $B_1, \ldots, B_{n+1}$ در شرط لم قبل صدق می‌کنند. در نتیجه دایرهٔ جهت‌دار E وجود دارد که B_1 و B_{n+1} به ترتیب از تقاطع مماس‌های هم‌جهت رسم‌شده از A_1 و A_{n+1} بر E با دایرهٔ C به دست می‌آیند. اما $A_1 = A_{n+1}$ پس $B_1 = B_{n+1}$ و هر نقطهٔ دلخواه C رأس یک n-ضلعی محاط در C و محیط بر D است. □

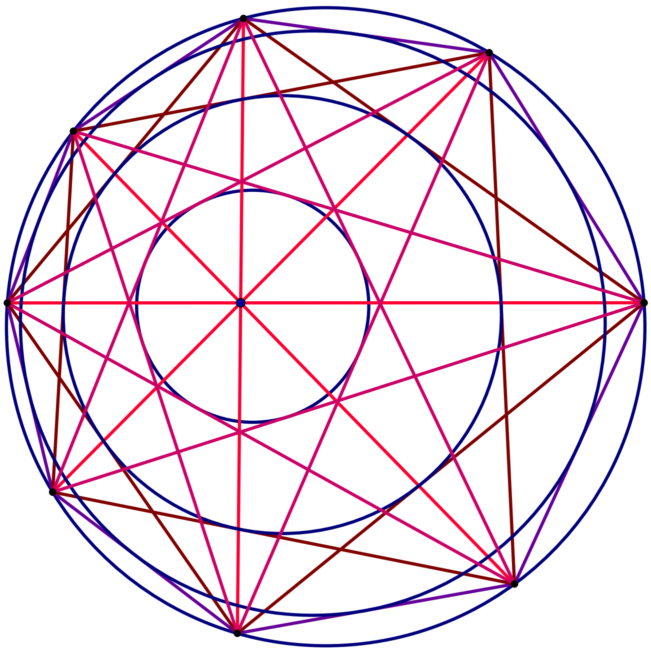
تمرین ۶. فرض کنید در لم ۲ جهت تماس A_iA_{i+1}ها برابر و خلاف جهت تماس B_iB_{i+1}ها باشد. نشان دهید در این‌صورت دایرهٔ جهت‌دار E بیرون C و هم‌محور با C و D وجود دارد که هر کدام از B_iها از تقاطع مماس هم‌جهت رسم شده از A_i بر E با دایرهٔ C به دست می‌آیند.

قضیه ۱. فرض کنید $n \geq ۳$ و $A_1 \ldots A_n$ یک چندضلعی محاط در C و محیط بر D و k عددی صحیح باشد. در این صورت وترهای A_iA_{k+i} بر دایره‌ای درون C و خطوط A_iA_{k-i} بر دایره‌ای بیرون C مماسند. ضمناً همهٔ این دوایر با C و D هم‌محورند. (A_iها به صورت دوری اندیس‌گذاری شده‌اند و وقتی برای دو اندیس i و j، A_i برابر A_j باشد، خط A_iA_j را خط مماس بر C در A_i در نظر می‌گیریم.)

اثبات. برای قسمت اول، لم ۲ را برای دو دنبالهٔ $A_1, A_2, \ldots$ و $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots$ به کار ببرید. قسمت دوم حکم هم از به کارگیری تمرین قبل برای دو دنبالهٔ $A_1, A_2, \ldots$ و $A_{k-1}, A_{k-2}, \ldots$ به دست می‌آید. □

تمرین ۷. نشان دهید در حالت n زوج و $k = \frac{n}{2}$، وترهای A_iA_{k+i} هم‌رسند. (در شکل ۷ این هم‌رسی برای $n = ۸$ دیده می‌شود.)

[۵] این اثبات با تغییراتی اندک از [۳] برگرفته شده است.



شکل ۷: قضیهٔ ۱ برای $n = ۸$

تمرین ۸. قضیهٔ پونسله را برای دو دایرهٔ بیرون یکدیگر و همچنین برای دو دایرهٔ متقاطع ثابت کنید. (در هر یک از این حالات باید صورتی مشابه از لم‌های ۱ و ۲ به دست آورده و آنها را ثابت کنید.)

همان‌طور که در ابتدای مقاله اشاره شد، قضیهٔ پونسله وقتی به جای C و D دو مقطع مخروطی دلخواه (با هر وضعیت نسبی دلخواه از نظر تقاطع و یا درون و بیرون بودن) قرار دهیم، درست است. اثبات این صورت تعمیم‌یافته از قضیهٔ پونسله، فراتر از سطح این مقاله است و در اینجا فقط به ایدهٔ آن اشاره می‌کنیم.
خانواده‌ای از تبدیلات صفحه با نام "تبدیلات تصویری" وجود دارد که خطوط را به خطوط می‌برد و مقاطع مخروطی را به مقاطع مخروطی تبدیل می‌کند. هر دو مقطع مخروطی درون هم را می‌توان با یک تبدیل تصویری به دو دایره درون هم تبدیل کرد. در نتیجه قضیهٔ پونسله در این حالات از حالت خاص دوایر نتیجه می‌شود. حالت دو مقطع مخروطی که در دو نقطه متقاطع و یا در یک نقطه بر یکدیگر مماس باشند را نیز می‌توان با همین ایده نتیجه گرفت. اما برای حالت‌های دیگر (مثل ۴ نقطهٔ تقاطع) این ایده نیز کارساز نیست و باید از خانوادهٔ بزرگتری از تبدیلات، یعنی "تبدیلات تصویری مختلط" استفاده کرد.(البته این تبدیلات روی "صفحهٔ تصویری مختلط" تعریف شده‌اند و تبدیلاتی از صفحه به صفحه نیستند.)[۶]
در قسمت بعد به بهانهٔ اصل دوگانی اندکی هم راجع به تبدیلات تصویری بحث خواهیم کرد.

[۶] یک روش دیگر هم اثبات لم ۱ برای دو مقطع مخروطی دلخواه است. این اثبات را می‌توانید در فصل سوم[۳] ببینید.

۴ اصل دوگانی

ما در بسیاری از مسائل هندسه با نقاط حاصل از تقاطع خطوط سروکار داریم و حتی در بعضی از اوقات برای حل یک مسأله خطی کمکی رسم می‌کنیم و تقاطع آن را با خطوط و دیگر اشکال مسأله بررسی می‌کنیم. اما همیشه هر دو خط دلخواهی همدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند و ممکن است آن دو موازی باشند. همین امر باعث می‌شود تا برای حل بعضی از مسائل و یا بیان بعضی از گزاره‌ها، مجبور شویم تا حالت‌های مختلف توازی و یا تقاطع خطوط مسأله را جداگانه بررسی کنیم.

یک ایدهٔ جالب برای رهایی از این مشکل وجود دارد که در بسیاری از موارد کارساز است. ایده این است که به ازای هر راستا در صفحه، یک نقطهٔ تخیلی در "بی‌نهایت" به صفحه اضافه کنیم. علاوه بر این قرارداد کنیم که همهٔ چنین نقاط تخیلی روی یک خط موسوم به "خط بی‌نهایت" قرار دارند و هر خط معمولی به غیر از نقاط واقعی روی آن از نقطهٔ بی‌نهایت متناظر با دستهٔ خطوط موازی با آن نیز بگذرد. به این صفحهٔ جدید **صفحهٔ تصویری** می‌گویند. بنابراین نقاط صفحهٔ تصویری، نقاط صفحهٔ معمولی به اضافهٔ نقاط خط بی‌نهایت هستند و خطوط آن خط‌های معمولی صفحه (که به هر کدام یک نقطه در بی‌نهایت اضافه شده است) به همراه خط بی‌نهایت هستند.

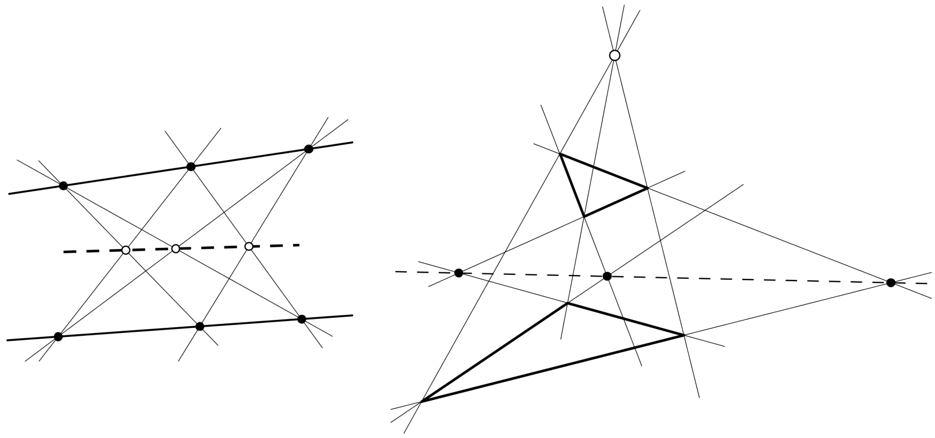
اندکی تأمل در مورد رابطهٔ "وقوع" نقاط و خطوط در صفحهٔ تصویری نشان می‌دهد که از هر دو نقطهٔ آن دقیقاً یک خط می‌گذرد و علاوه بر این هر دو خط همدیگر را در دقیقاً یک نقطه قطع می‌کنند. مثلاً اگر دو خط معمولی (غیر از خط بی‌نهایت) را در نظر بگیریم، یا در یک نقطهٔ متناهی متقاطعند و یا موازی هستند و در نتیجه هر دوی آنها از یک نقطه در بی‌نهایت که متناظر با راستای آن‌دو است می‌گذرند. در نتیجه هر دو خط در صفحهٔ تصویری نسبت به هم فقط یک وضعیت دارند، که همان تقاطع در یک نقطه است. به خاطر همین مزیت است که در برخی از موارد اگر خودمان را به نقاط معمولی (و یا متناهی) محدود نکنیم، بیان گزاره‌های هندسی ساده‌تر می‌شود. به عنوان مثال به دو قضیهٔ معروف زیر توجه کنید:

> **قضیهٔ دزارگ.** فرض کنید ABC و $A'B'C'$ دو مثلث در صفحه هستند. در این صورت خطوط واصل رئوس متناظر دو مثلث همرسند اگر و فقط اگر محل تقاطع امتداد ضلع‌های متناظر هم‌خط باشند.

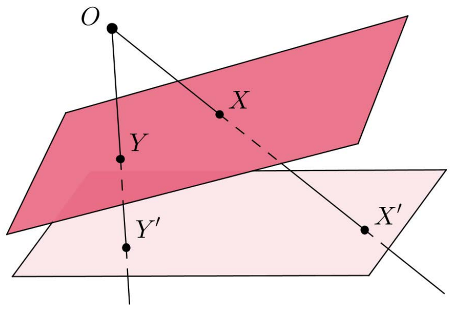
> **قضیهٔ پاپوس.** فرض کنید A، B و C سه نقطهٔ هم‌خط و A'، B' و C' هم سه نقطه روی خطی دیگر باشند. دراین‌صورت اگر X برابر با تقاطع دو خط AB' و BA'، Y برابر با تقاطع دو خط BC' و CB' و Z برابر با تقاطع دو خط CA' و AC' باشد، X، Y و Z هم‌خطند.

در بیان این دو قضیه محل‌های تقاطع خطوط بدون هیچ‌گونه حالت‌گیری‌ای موجود فرض شده‌اند. در واقع این نحوهٔ بیان از دو قضیهٔ بالا فقط با در نظر گرفتن نقاط بی‌نهایت و تعبیری که از وقوع در صفحهٔ تصویری کردیم، دقیق و کامل است.

تمرین ۹. الف) اگر در قضیهٔ پاپوس AB' و BA' موازی باشند، بنابر قضیه چه اتفاقی می‌افتد؟



شکل ۸: راست: قضیهٔ دزارگ، چپ: قضیهٔ پاپوس



شکل ۹: تبدیل تصویر مرکزی

ب) اضلاع متناظر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ موازی هستند. قضیهٔ دزارگ در مورد این دو مثلث چه نتیجه‌ای دارد؟ آیا این حالت خاص را می‌توانید خودتان ثابت کنید؟

به هر تبدیل صفحهٔ تصویری که خط را به خط تبدیل کند، **تبدیل تصویری** می‌گویند. بسیاری از تبدیلات آشنای هندسی مانند انتقال، دوران، تقارن نسبت به یک خط و یا حتی انبساط و انقباض در یک جهت مختصاتی (مثل تبدیل $(x, y) \to (ax, y)$) مثال‌هایی از تبدیلات تصویری هستند.[۷] برای پیدا کردن یک ردهٔ کلی‌تر از مثال‌ها، می‌توانید دو کپی از صفحه را به عنوان دو صفحه در فضای سه‌بعدی در نظر بگیرید و نقاط یکی از صفحات را از یک کانون بر صفحهٔ دیگر تصویر کنید. (شکل ۹) این تبدیلات هم خطوط را به خطوط می‌برند و در نتیجه تبدیل تصویری هستند.[۸]

مفاهیم هندسهٔ تصویری متشکل از همهٔ مفاهیم هندسی هستند که تحت تبدیلات تصویری حفظ می‌شوند. پس هر مفهومی که توسط مفهوم خطوط و رابطهٔ وقوع خط و نقطه قابل بیان باشد، یک مفهوم تصویری است.

[۷] البته این تبدیلات معمولاً روی نقاط متناهی (واقعی) صفحه تعریف شده‌اند. ولی به راحتی می‌توان هر یک از آن‌ها را روی نقاط بی‌نهایت نیز گسترش داد و به یک تبدیل روی کل صفحهٔ تصویری رسید.

[۸] برای آشنایی با تبدیلات تصویری، مطالعهٔ جلد سوم از کتاب تبدیلات هندسی یاگلم[۲] را به خوانندگان علاقمند پیشنهاد می‌کنیم.

با این وصف، به وضوح مفاهیمی مثل "نقطه"، "خط"، "هم‌خطی نقاط"، "هم‌رسی خطوط"، "چهارتایی‌های هم‌ساز" و ... مفاهیم تصویری هستند، اما مفاهیمی مثل "فاصله"، "زاویه"، "عمود بودن"، "دایره"، "مربع" و ... در هندسهٔ تصویری معنا ندارند. می‌توان دید که تحت تبدیلات تصویری، مقاطع مخروطی به مقاطع مخروطی تبدیل می‌شوند. (درستی این مطلب را می‌توانید در مورد تبدیلات تصویری‌ای که برشمرده شد، به راحتی چک کنید.) پس "مقطع مخروطی" هم یک مفهوم تصویری است، با وجود اینکه نوع یک مقطع مخروطی (بیضی یا هذلولی یا سهمی) تحت تبدیلات تصویری حفظ نمی‌شود.
همان‌طور که گفتیم از هر دو نقطه در صفحهٔ تصویری دقیقاً یک خط می‌گذرد و هر دو خط هم همدیگر را در دقیقاً یک نقطه قطع می‌کنند. این نکته نشان می‌دهد که رابطهٔ وقوع در صفحهٔ تصویری دارای یک تقارن جالب بین نقش خط و نقطه است. از طرف دیگر رابطهٔ وقوع به عبارتی همهٔ هندسهٔ تصویری است، پس می‌توان حدس زد که در کل هندسهٔ تصویری یک تقارن وجود دارد که نقش نقطه و خط را جابجا می‌کند. در واقع این حدس درست است و صورت کامل شدهٔ آن قضیه‌ای در هندسهٔ تصویری است که توسط پونسله با نام "اصل دوگانی" نام‌گذاری شده است. این اصل را می‌توان هم از طریق رویکرد اصل موضوعی و هم از طریق توصیف جبری صفحهٔ تصویری ثابت کرد.
بیان دقیقتر اصل دوگانی به صورت زیر است. برای هر مفهوم هندسهٔ تصویری یک مفهوم دوگان وجود دارد به صورتی که دوگان دوگان یک مفهوم خودش است: "خط" دوگان "نقطه" (در نتیجه "نقطه" دوگان "خط") و "وقوع یک نقطه روی یک خط" دوگان "گذشتن یک خط از یک نقطه" است. با استفاده از این تعریف ساده می‌توانیم دوگان همهٔ مفاهیم و جملات دیگر در هندسهٔ تصویری را به دست آوریم. مثلاً دوگان "نقطهٔ تقاطع دوخط"، "خط گذرنده از دو نقطه" است و وقتی می‌گوییم "سه نقطه هم‌خطند"، منظورمان این است که خطی وجود دارد که این سه نقطه روی آن قرار دارند، پس دوگان این جمله این می‌شود که "نقطه‌ای واقع بر سه خط وجود دارد" و یا معادلاً "سه خط همرسند". یک مثال پیچیده‌تر "نقاط واقع بر یک مقطع مخروطی" است که دوگان آن "خطوط مماس بر یک مقطع مخروطی" می‌شود. بنابر اصل دوگانی، اگر در یک گزارهٔ درست در هندسهٔ تصویری هر مفهوم را با مفهوم دوگانش جایگزین کنیم، گزارهٔ حاصل نیز گزاره‌ای درست است. با توجه به اینکه دوگان دوگان یک گزاره، برابر با خودش است، بنابر این اصل می‌توان گفت که درستی هر گزاره با درستی دوگانش معادل است.
به عنوان نمونه قضیهٔ پاسکال را در نظر بگیرید:

> **قضیهٔ پاسکال.** اگر $A_1,\dots,A_6$ شش نقطه واقع بر یک مقطع مخروطی باشند، در این‌صورت نقاط $A_1A_2\cap A_4A_5$، $A_2A_3\cap A_5A_6$ و $A_3A_4\cap A_6A_1$ روی یک خط قرار دارند. (در اینجا منظور از A_iA_j خط گذرنده از A_i و A_j است.)

به عبارت ساده‌تر قضیهٔ پاسکال می‌گوید که نقاط تقاطع امتداد اضلاع مقابل یک شش‌ضلعی محاط در یک مقطع مخروطی هم‌خطند. حال با رعایت قواعد بالا دوگان قضیهٔ پاسکال چنین خواهد شد:

> **دوگان قضیهٔ پاسکال.** اگر $l_1,\dots,l_6$ شش خط مماس بر یک مقطع مخروطی باشند، در این‌صورت خط واصل $l_1\cap l_2$ و $l_4\cap l_5$، خط واصل $l_2\cap l_3$ و $l_5\cap l_6$ و خط واصل $l_3\cap l_4$ و $l_6\cap l_1$ هم‌رسند.

با ساده‌سازی بیشتر این گزارهٔ دوگان، متوجه می‌شویم که این گزاره همان قضیهٔ بریانشن است که می‌گوید قطرهای یک شش‌ضلعی محیط بر مقطع مخروطی هم‌رسند.

تمرین ۱۰. الف) دوگان قضیهٔ پاپوس را بیان کنید.

ب) نشان دهید دوگان قضیهٔ دزارگ با قضیهٔ دزارگ معادل است.

اما دوگان قضیهٔ پونسله چیست؟ اگر C و D دو مقطع مخروطی در صفحه باشند، یک n-ضلعی محیط بر D و محاط در C را می‌توان این‌گونه توصیف کرد: دنباله‌ای به صورت

$$A_1, l_1, A_2, l_2, \dots, A_n, l_n, A_{n+1} = A_1, l_{n+1} = l_1$$

که A_i ها نقاطی روی C و l_i ها خطوطی مماس بر D هستند و هر نقطه در دنباله روی دو خط مجاورش قرار دارد. علاوه بر این برای هر i، $A_i \neq A_{i+1}$ مگر اینکه A_i تنها نقطهٔ تقاطع l_i و C باشد (یعنی l_i بر C مماس باشد) و همین‌طور $l_i \neq l_{i+1}$ مگر اینکه l_i تنها مماس بر D و گذرا از A_{i+1} باشد.(یعنی A_{i+1} روی D باشد) واضح است که اگر دوگان نقاط واقع بر C و خطوط مماس بر D را، خطوط مماس بر مقطع مخروطی c و نقاط واقع بر مقطع مخروطی d در نظر بگیریم، دوگان "n-ضلعی محاط در C و محیط بر D"، یک "n-ضلعی محیط بر c و محاط در d" می‌شود. پس با دوگان کردن قضیهٔ پونسله فقط نقش C و D جابجا می‌شود و قضیهٔ پونسله با دوگانش یکسان است. با این حال دوگان گزاره‌ها و لم‌های قسمت قبل، مطالب جالبی را بیان می‌کنند. مثلاً دوگان قضیهٔ ۱ قضیهٔ جالب زیر را نتیجه می‌دهد:

قضیه ۲. فرض کنید d یک بیضی و c بیضی دیگری درونش و $X_1 \dots X_n$ یک n-ضلعی محاط در d و محیط بر c باشد. در این‌صورت اگر برای هر عدد $0 \leq k < n$، P_k را n نقطهٔ حاصل از تقاطع امتداد وترهای $X_i X_{i+1}$ و $X_{i+k} X_{i+k+1}$ و Q_k را نقاط حاصل از تقاطع امتداد وترهای $X_i X_{i+1}$ و $X_{k-i} X_{k-i-1}$ تعریف کنیم،[9] نقاط هر یک از P_kها روی یک مقطع مخروطی و نقاط هر یک از Q_kها روی یک هذلولی قرار دارد. علاوه بر این اگر c و d هم‌کانون باشند، دو کانون همهٔ این مقاطع مخروطی هم با این دو یکسان است و مقطع مخروطی گذرنده از هر یک از P_kها بیضی است. (در اینجا تقاطع یک وتر با خودش را محل تماس با c در نظر گرفته‌ایم.)

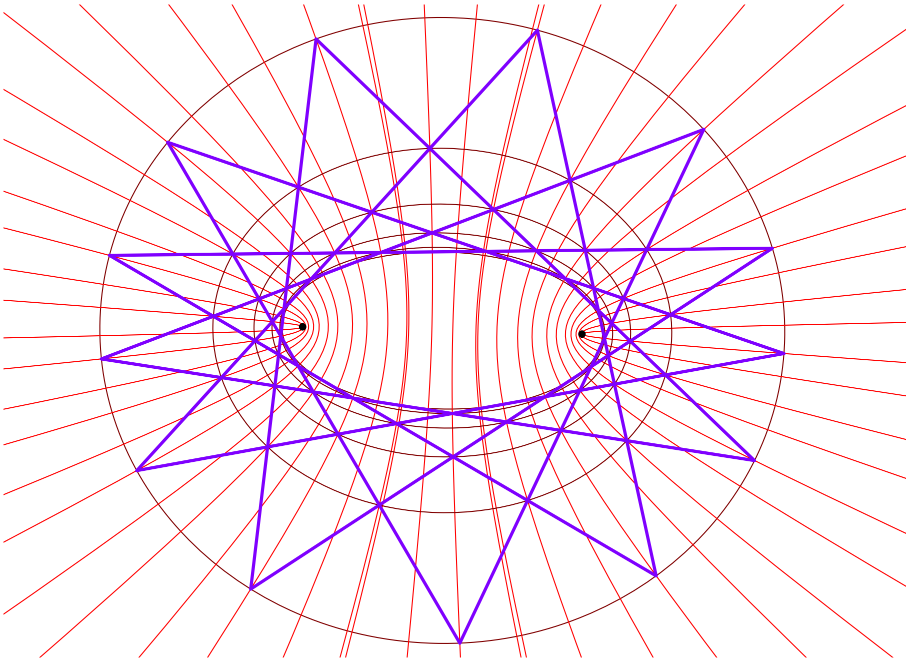
متأسفانه اثبات این قضیه هم فراتر از سطح این مقاله است. اما ایدهٔ کلی آن همان‌طور که به آن اشاره شد، استفاده از قضیهٔ ۱ و پیدا کردن دوگان مفاهیم درون، بیرون و هم‌محور است. در این رابطه تمرین زیر می‌تواند جالب باشد:

تمرین ۱۱. فرض کنید c و d به ترتیب دوگان مقاطع مخروطی C و D باشند. نشان دهید:

الف) اگر C و D خارج یکدیگر باشند، c و d چهار نقطهٔ تقاطع دارند.

ب) اگر D درون C باشد، c درون d است.

[9] تعداد نقاط Q_k در حالت n فرد، $\frac{n+1}{2}$ و درحالت n زوج، بسته به زوجیت k، $\frac{n}{2}+1$ یا $\frac{n}{2}$ است.



شکل ۱۰: قضیهٔ ۲ برای دو بیضی هم‌کانون و $n = ۱۳$. (یکی از بیضی‌ها در شکل دیده نمی‌شود.) d کدام یک از بیضی‌های شکل است؟

ج) اگر C و D دقیقاً دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، c و d دقیقاً دو نقطهٔ اشتراک دارند.

د) اگر C و D بر هم مماس باشند، c و d هم بر هم مماسند.

۵ مسائل

۱. اثباتی ساده‌تر برای قضیهٔ پونسله در حالت دوایر و $n = ۳$، ارائه کنید.

۲. یک پنج‌ضلعی محدب محیطی در صفحه داریم که تقاطع قطرهای آن نیز رئوس یک پنج‌ضلعی محدب محیطی را تشکیل می‌دهند. نشان دهید این پنج‌ضلعی، یک پنج‌ضلعی محاطی است.

۳. فرض کنید دایرهٔ D با شعاع r، درون دایرهٔ C با شعاع R قرار دارد و فاصلهٔ مرکزهای آنها برابر d است. نشان دهید:

الف) مثلثی محیط بر D و محاط در C وجود دارد، اگر و فقط اگر $R^۲ = d^۲ + ۲Rr$. (قضیهٔ اویلر)

ب) چهارضلعی‌ای محیط بر D و محاط در C وجود دارد، اگر و فقط اگر

$$(R^۲ - d^۲)^۲ = ۲r^۲(R^۲ + d^۲).$$

۴. C و D دو دایره‌اند. به یک وتر C، وتر "خوب" می‌گوییم، اگر وسط آن روی D واقع باشد. به دنبالهٔ $X_۱, X_۲, \ldots$ از نقاط C دنبالهٔ "خوب" می‌گوییم، اگر همهٔ وترهای $X_i X_{i+۱}$ خوب باشند و $X_i \neq X_{i+۲}$ مگر اینکه $X_i X_{i+۱}$ تنها وتر خوب گذرنده از X_i باشد.(اگر X روی تقاطع C و D (در صورت وجود) باشد، XX را هم یک وتر خوب حساب می‌کنیم.) نشان دهید اگر یک دنبالهٔ خوب با دورهٔ تناوب n داشته باشیم، همهٔ دنباله‌های خوب n-متناوبند.

۵. فرض کنید C یک دایره است. به ازای هر دایرهٔ جهت‌دار D، تابع $f_D : C \to C$ را به این صورت تعریف می‌کنیم. برای هر نقطهٔ P روی C، $f_D(P)$ محل تقاطع مماس هم‌جهت رسم شده از P بر D، با دایرهٔ C است.

الف) فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دو دایرهٔ جهت‌دار درون C و هم‌محور با آن باشند. نشان دهید توابع $f_{C_۱}$ و $f_{C_۲}$ با هم جابجا می‌شوند، یعنی $f_{C_۱} \circ f_{C_۲} = f_{C_۲} \circ f_{C_۱}$.

ب) نشان دهید با فرضیات قسمت قبل، دایرهٔ جهت‌دار $C_۳$ درون C و هم‌محور با C، $C_۱$ و $C_۳$ وجود دارد که $f_{C_۱} \circ f_{C_۲} = f_{C_۳}$.

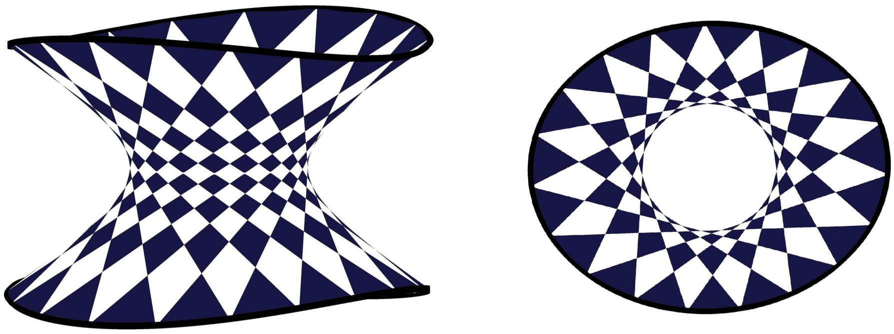
ج) فرض کنید $C_۱, \ldots, C_n$ دوایری جهت‌دار و هم‌محور با C باشند و برای یک نقطهٔ P روی C، $f_{C_۱} \circ \cdots \circ f_{C_n}(P) = P$. نشان دهید برای هر نقطهٔ دیگر Q روی C نیز $f_{C_۱} \circ \cdots \circ f_{C_n}(Q) = Q$.

د) اگر در قسمت‌های قبل به جای شرط درون، شرط درون و یا متباین (دایره‌ای که نه درون C باشد و نه C درون آن) قرار دهیم چه اتفاقی می‌افتد؟ گزاره‌های درست متناظر را در این حالت حدس بزنید و اثبات کنید.

۶. دو قضیهٔ دیگر از پونسله:

الف) فرض کنید P در میان n-ضلعی‌های محدب محاط در بیضی C، بیشترین محیط را داشته باشد. دراین‌صورت اضلاع P بر یک بیضی هم‌کانون با C مماس هستند.

ب) فرض کنید Q در میان n-ضلعی‌های محدب محیط بر بیضی C، کمترین محیط را داشته باشد. دراین‌صورت رئوس Q روی یک بیضی هم‌کانون با C قرار دارند.



شکل ۱۱: قضیهٔ پونسله در فضا؛ شکل سمت راست نمای از بالای شکل سمت چپ (هذلولی‌گون) است.

منابع

[۱] ناتان آ. کورت، هندسهٔ مسطحه، مقدمه‌ای بر هندسه‌ی نوین مثلث و دایره، ترجمهٔ محمود دیانی، انتشارات فاطمی (۱۳۸۶)

[۲] ایزاک م. یاگلم، تبدیلات هندسی، جلد سوم، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی (۱۳۷۷)

[3] Akopyan, A., Zaslavsky, A.(2007) *Geometry of conics*, AMS

[4] Berger, M.(2010) *Geometry revealed, A Jacob's Ladder to Modern Higher Geometry*, Springer

[5] Hrasko, A.(2000) Poncelet-type problems, an elementary approach. *Elemente der Mathematik*, 55, 1–18

[6] Schwartz, R.(2007) The Poncelet grid. *Advances in Geometry*, 7, 157–175