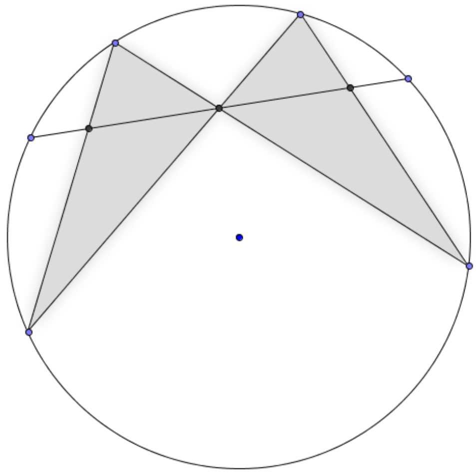
قضیه پروانه

محمد قیاسی و امیر سعیدی



مقدمه

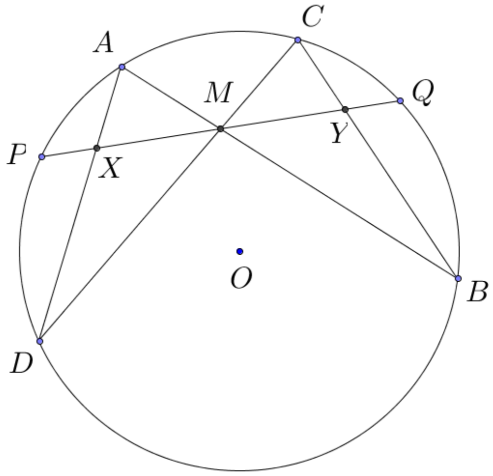
در نامه‌ای که ویلیام هرشل [۷] کاشف سیارهٔ اورانوس به ویلیام والاس [۸] ریاضیدان و منجم اسکاتلندی در سال ۱۸۰۵ نوشت، اثبات مسئله ای را از وی خواستار شد که بعدها به قضیهٔ پروانه مشهور شد.

قضیهٔ پروانه چه می گوید؟

قضیه (پروانه). *در دایره‌ای وتر دلخواه PQ را رسم کرده ایم. سپس دو وتر AB و CD را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که از نقطه M واقع در وسط PQ عبور می‌کنند. اگر AD و BC وتر PQ را در نقاط X و Y قطع کنند، آنگاه این دو نقطه از*

[۷] William Herschel
[۸] William Wallace

نقطهٔ M به یک فاصله اند.



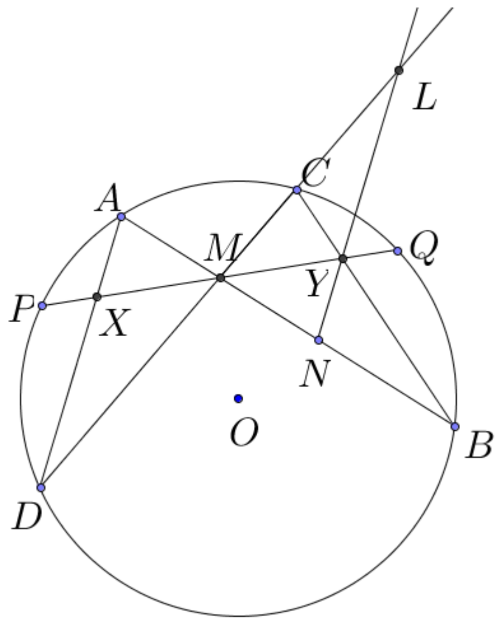
چند اثبات برای قضیهٔ پروانه

برای قضیهٔ پروانه اثبات‌های متعدد و متنوعی ارائه شده است، چند تا از این اثبات‌ها را انتخاب کرده‌ایم و در ادامهٔ این بخش آورده‌ایم.

اثبات اول (اثبات ویلیام والاس)

از نقطهٔ Y خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا CD و AB را در نقاط L و N قطع کند. از توازی دو خط NL و AD نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ $\angle L$ و $\angle D$ با هم برابرند. از طرفی دیگر دو زاویه ی $\angle B$ و $\angle D$ نیز با یکدیگر برابرند، پس چهارضلعی $CLBN$ محاطی است و داریم:

$$YC \times YB = YN \times YL$$



حال اگر به تشابه دو مثلث $\triangle NML$ و $\triangle AMD$ توجه کنیم نتیجه می شود که عبارت $\frac{MY^{۲}}{YN\times YL}$ در مثلث $\triangle NML$ با نظیرش در مثلث $\triangle AMD$ یعنی عبارت $\frac{MX^{۲}}{XD\times XA}$ برابر است. پس می توانیم بگوییم:

$$\frac{MX^{۲}}{XP\times XQ}=\frac{MX^{۲}}{XD\times XA}=\frac{MY^{۲}}{YN\times YL}=\frac{MY^{۲}}{YC\times YB}=\frac{MY^{۲}}{YP\times YQ}$$

به کسرهای ابتدایی و انتهایی تساوی فوق نگاه کنید. با افزودن صورت هر کسر به مخرج آن داریم:

$$\frac{MX^{۲}}{MX^{۲}+XP\times XQ}=\frac{MY^{۲}}{MY^{۲}+YP\times YQ}$$

اما مخرج کسرهای فوق با هم برابرند(چرا؟) پس نتیجه می‌شود که صورت‌هایشان نیز با هم برابرند. یعنی داریم:

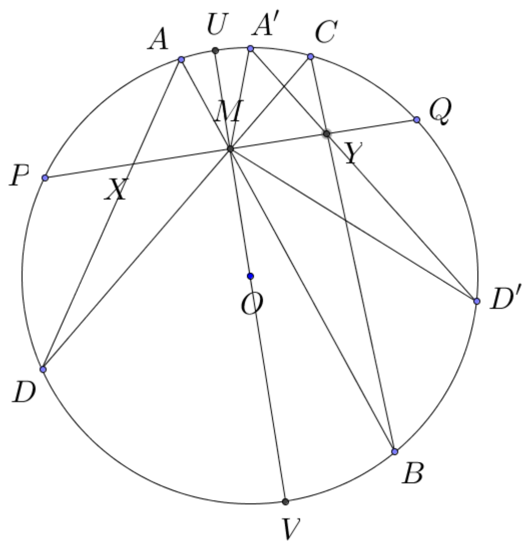
$$MY=MX$$

و این همان چیزی است که به دنبال اثباتش بودیم.

مراحل تولد یک پروانه و خروجش از پیله!

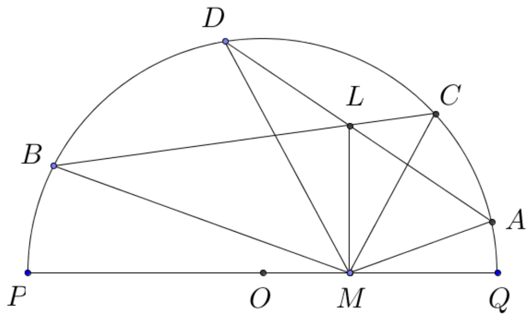
اثبات دوم (یک اثبات جالب)

مرکز دایره را O می نامیم. بال سمت چپ پروانه را نسب به خط OM قرینه کنید. با این کار نقاط جدید A' و D' در نیمهٔ سمت چپ دایره به دست می‌آیند. برای اثبات قضیهٔ پروانه کافی است اثبات کنیم که دو بال پروانه روی خط PQ همرس‌اند.

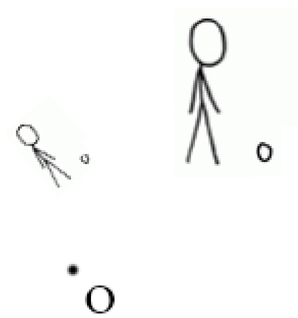


پس مسئلهٔ جدیدی به صورت زیر داریم:

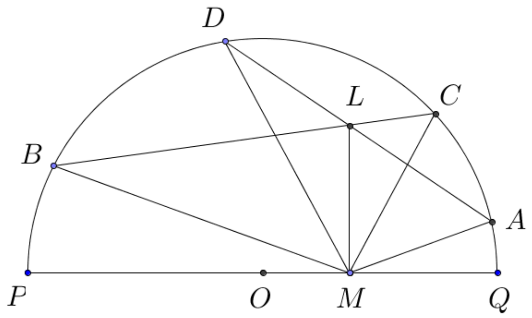
در نیم دایرهٔ زیر یک نقطهٔ دلخواه M روی قطر PQ انتخاب کرده‌ایم و نقاط A و B و C و D را روی نیم‌دایره به‌گونه‌ای انتخاب می کنیم که داشته باشیم: $\angle AMQ = \angle BMP$ و $\angle CMQ = \angle DMP$



در این صورت BC و AD روی عمود وارد بر PQ در نقطهٔ M همرس‌اند.
برای حل این مسئله فرض می‌کنیم که AD و BC یکدیگر را در L قطع می‌کنند. از L به M وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که LM بر PQ عمود است. می دانیم که بالهای پروانه دو تا مثلث متشابه هستند. پس بعد از این قرینه‌سازی نیز می فهمیم که دو مثلث $\triangle MAD$ و $\triangle MCB$ با هم متشابه‌اند. حال اگر به شکل کمی دقت کنیم نتیجه می شود که مثلث $\triangle MCB$ حاصل دوران مثلث $\triangle MAD$ به اندازهٔ زاویهٔ $\angle AMC$ حول نقطهٔ M است به اضافهٔ یک تغییر سایز مثلث پس از دوران. به چنین چیزی چیزی تجانس مارپیچی می‌گویند. یک نتیجهٔ ساده‌ای که از این یک چنین عملی می گیرند این است که زاویه ی اجزای متناظر دو جسم که یکی حاصل از تجانس ماربیچی دیگری حول یک نقطهٔ دلخواه است همان زاویه دوران در تجانس مارپیچی است.
برای مثال در شکل زیر که یکی از تصاویر دوران دیگری حول نقطهٔ O به همراه یک تجانس است زاویهٔ بین خط واصل دست راست و دست چپ آدمک بزرگ و خط واصل دست راست و دست چپ آدمک کوچک با همان زاویهٔ دوران برابر است.



این مشاهده به این معناست که زاویهٔ بین دو پاره‌خط BC و AD یعنی $\angle CLA$ با زاویه ی بین دو پاره‌خط CM و AM یعنی $\angle CMA$ برابر است. پس چهارضلعی $LMCA$ محاطی است و $\angle LMC$ با $\angle CAD$ برابر است. به طریق مشابه نتیجه می‌شود که چهارضلعی $ADMV$ نیز محاطی است و زاویه‌های $\angle DML$ و $\angle DBC$ با هم برابرند. از این تساوی‌ها و نیز تساوی دو زاویهٔ $\angle CBD$ و $\angle CAD$ می فهمیم که $\angle CML$ و $\angle DML$ با هم برابرند و عمود بودن LM بر PQ آشکار می‌شود.
اینجا فرصت خوبی است که به بهانهٔ نیم‌دایره‌ای که در بالا ترسیم کردیم، چند تمرین مرتبط با آن را مطرح کنیم و حل آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم.



در شکل فوق دو زاویهٔ $\angle AMQ$ و $\angle BMP$ و همچنین دو زاویهٔ $\angle CMA$ و $\angle DMB$ با هم برابرند.

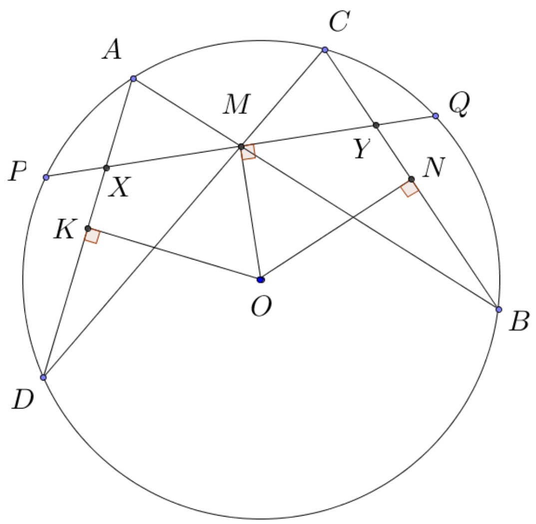
تمرین ۱. *نشان دهید AB و CD روی PQ همرس اند.*

تمرین ۲. *نشان دهید CA و BD روی LM همرس اند.*

تمرین ۳. *نشان دهید چهارضلعی‌های $OMCD$ و $OMAB$ محاطی‌اند.*

اثبات سوم (Shklyarski)[۹]

فرض کنید O مرکز دایره باشد. چون OM بر XY عمود است برای اینکه نشان دهیم $MY = MX$ کافیست نشان دهیم زاویه‌های $\angle XOM$ و $\angle YOM$ برابرند.
عمودهای OK و ON را از O بر AD و BC رسم می‌کنیم، بدیهی است که K و N وسط AD و BC هستند و همچنین $\angle ADC = \angle ABC$ و $\angle DCB = \angle DAB$. پس مثلث‌های $\triangle ADM$ و $\triangle CBM$ متشابه‌اند و داریم: $\frac{AD}{AM} = \frac{BC}{CM}$ و $\frac{AK}{AM} = \frac{BN}{CM}$

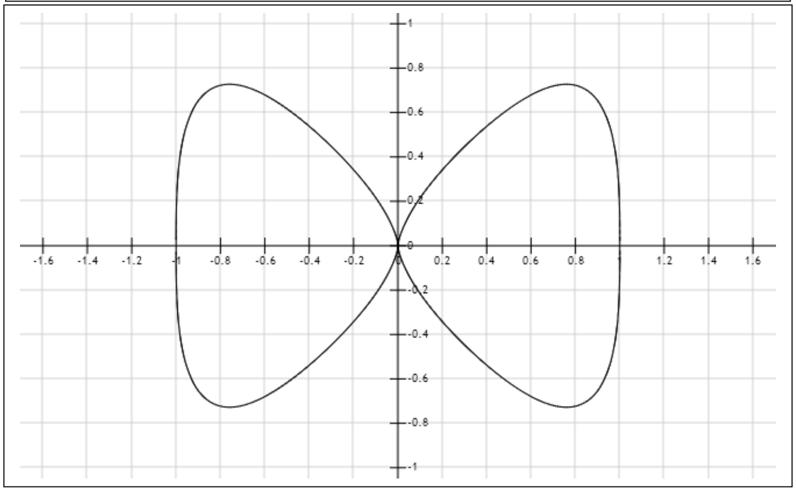


و در نتیجه مثلث‌های $\triangle AKM$ و $\triangle CNM$ متشابه اند و دو زاویهٔ $\angle AKM$ و $\angle CNM$ با هم برابرند. حال با نگاهی به چهارضلعی‌های $OKXM$ و $ONYM$ می‌بینیم که هر دو، دو زاویهٔ ۹۰ درجهٔ غیرمجاور دارند و در نتیجه هر دو محاطی‌اند.

[۹] Shklyarski یکی از نویسندگان کتاب Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics است.

در چهارضلعی $OKXM$ تساوی $\angle AKM = \angle XOM$ و در چهارضلعی $ONYM$ تساوی $\angle CNM = \angle YOM$ را داریم. از این تساوی‌ها می فهمیم که $\angle XOM$ با $\angle YOM$ برابر است و از این برابری تساوی دو مثلث $\triangle XOM$ و $\triangle YOM$ به دست آمده و حکم اثبات می‌شود.

اگر نمودار $y^6 = x^2 - x^6$ را رسم کنید شکلی شبیه یک پروانه ایجاد می‌شود.



در پایان این بخش چند تمرین دیگر آورده‌ایم و حل آن‌ها را به خواننده واگذار می‌کنیم.

تمرین ۴. *در مثلث $\triangle ABC$، فرض کنید میانهٔ AM دایرهٔ محاطی داخلی را به ترتیب در K و L قطع کند و دایره محیطی را در N قطع کند. از K و L دو خط موازی با BC رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محاطی را در X و Y قطع کند. محل تقاطع AX با BC را P در نظر بگیرید و فرض کنید AY دایرهٔ محیطی را در Q قطع کند و QM دایرهٔ محیطی را در R قطع کند. ثابت کنید R و P و N هم‌خط اند.*

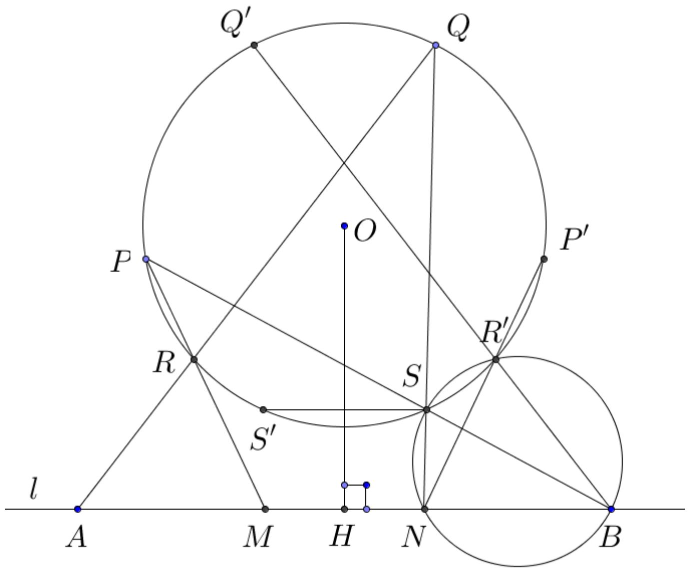
تمرین ۵. *در مثلث $\triangle ABC$ فرض کنید I و O به ترتیب مراکز دایره‌های محاطی داخلی و محیطی باشند. فرض کنید AI و AO دایرهٔ محیطی را به ترتیب در M و S قطع کند و D محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی با BC باشد. نقاط دلخواه X و Y را روی DM و AS طوری در نظر بگیرید که با I هم خط باشند. ثابت کنید $IX = IY$ اگر و فقط اگر IO بر XY عمود باشد.*

تعمیم‌هایی برای قضیهٔ پروانه

منظورمان از تعمیم یک قضیه، کلی سازی آن است به این معنا که وقتی قضیه‌ای را تعمیم می‌دهیم یک قضیهٔ دیگری به جای آن معرفی می‌کنیم که قضیهٔ پیشین به عنوان حالت خاصی از قضیهٔ جدید به دست می آید. یک قضیه را از ابعاد مختلفی می‌توان تعمیم داد. در این بخش دو تعمیم از قضیهٔ پروانه را آورده ایم.

تعمیم اول

قضیه (تعمیم اول). *فرض کنید H پای عمود از O، مرکز دایره‌ای دلخواه، بر خط دلخواه l باشد و B و A دو نقطهٔ دلخواه قرینه نسبت به H بر روی I باشند. اگر P و Q دو نقطه ی دلخواه بر روی دایره باشند و BP و AQ دایره را به ترتیب در S و R قطع کنند. آنگاه PR و QS خط I را در دو نقطهٔ قرینه نسبت به H قطع می‌کند.*



این قضیه را در همین جا اثبات می‌کنیم.
فرض کنید دایرهٔ محیطی مثلث $\triangle SBN$ دایرهٔ اول را در R' قطع کند و NR' و BR' دایره را در P' و Q' قطع کنند. از S خطی عمود بر OH رسم کنید تا دایره را در S' قطع کند. حال داریم:

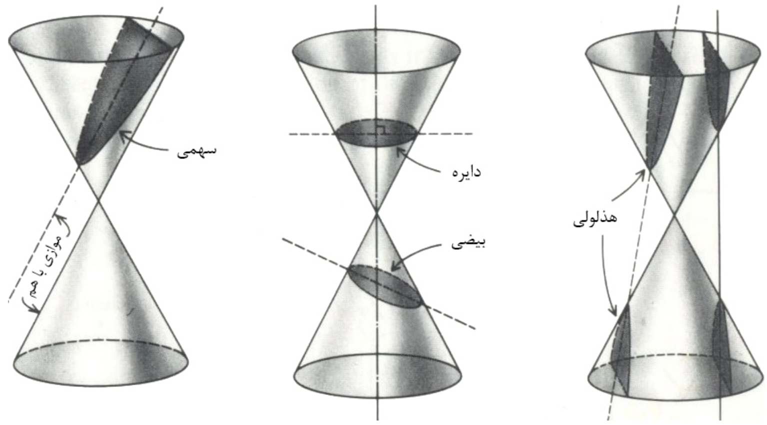
$$\angle PSS' = \angle SBN = \angle SR'N$$

پس دو کمان $P'S$ و PS' با هم برابرند و به دلیل تقارن S و S' نسبت به OH، نتیجه می‌شود که P' و P نیز نسبت به OH قرینه‌اند. به طریق مشابه تقارن Q و Q' نیز نسبت به OH اثبات می‌شود.
از طرفی دیگر می‌دانیم که A و B نسبت به OH قرینه‌اند پس می‌فهمیم دو خط AQ و BQ' نیز نسبت به OH قرینه‌اند که به این ترتیب تقارن R و R' نسبیت به OH معلوم می‌شود. حال اگر P و P' را به ترتیب به R و R' وصل کنیم و امتداد دهیم تا خط l را به ترتیب در M و N قطع کنند مشخص می شود که M و N نیز نسبت به H قرینه‌اند و این همان چیزی است که به دنبالش بودیم، یعنی MH برابر است با NH.

تعمیم دوم (پروانه روی مقاطع مخروطی می‌نشیند.)

دو خط متقاطع در فضا را در نظر بگیرید. یکی را حول دیگری دوران دهید. با این کار دو تا مخروط نامتناهی ایجاد می‌شود که نوک مخروط‌ها به یکدیگر چسبیده‌اند. یک پرسش شناخته شده این است که تقاطع این شکل با صفحه‌ای دلخواه چه اشکالی را می تواند ایجاد کند.
می‌توان اثبات کرد که شکلی که ایجاد می شود از این ۷ حالت بیرون نیست:

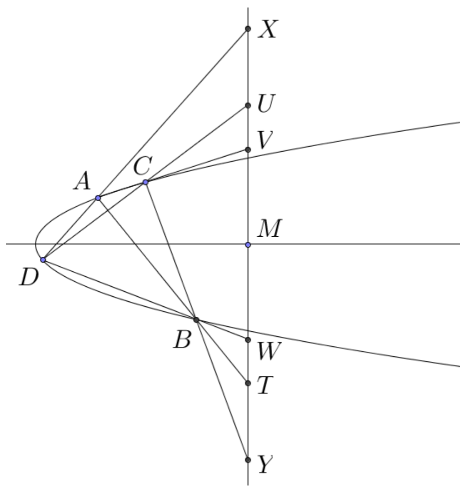
۱- دایره
۲- بیضی
۳- سهمی
۴- هذلولی
۵- یک نقطه
۶- یک خط
۷- دو خط متقاطع



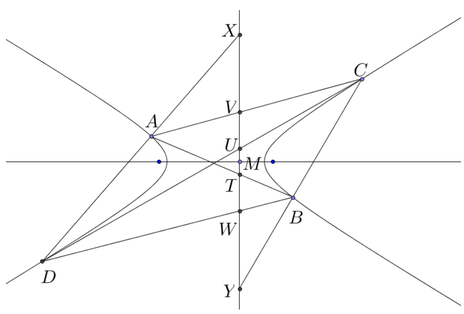
حال به سراغ تعمیمی از قضیهٔ پروانه می‌رویم که در مورد مقاطع مخروطی است.

قضیه (تعمیم در مورد مقاطع مخروطی). ۴ *نقطهٔ A و B و C و D را روی یک مقطع مخروطی قرار داده‌ایم. خط l عمودی است که از یک نقطهٔ دلخواه M واقع بر یکی از محورهای تقارن مقطع مخروطیمان، بر آن رسم کرده ایم. اگر خطوط واصل دو جفت مجزا از نقاط A و B و C و D خط l را در دو نقطهٔ هم‌فاصله از M قطع کنند، آنگاه خطوط واصل هر دو تا جفت مجزای دیگری از آنها نیز خط l را در نقاط هم‌فاصله از M قطع می‌کنند.*

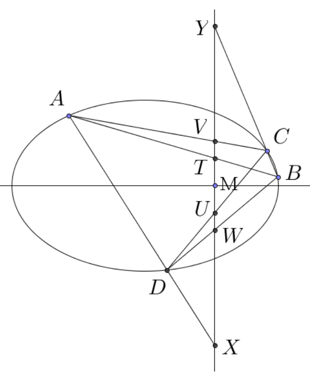
از قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود که در هر یک از اشکال زیر صحت یکی از تساوی‌های $MV = MW$، $MU = MT$ و $MX = MY$ صحت دو تای دیگر را نتیجه می‌دهد.
سهمی:



هذلولی:



بیضی:



منابع

[۱] The Butterfly Theorem،
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

[۲] Amir Saeedi، Generalization of Butterfly Theorem ،
http://www.artofproblemsolving.com

[۳] Rudolf Fritsch، Aspects of the Butterfly Theorem،
http://www.mathematik.uni-muenchen.de