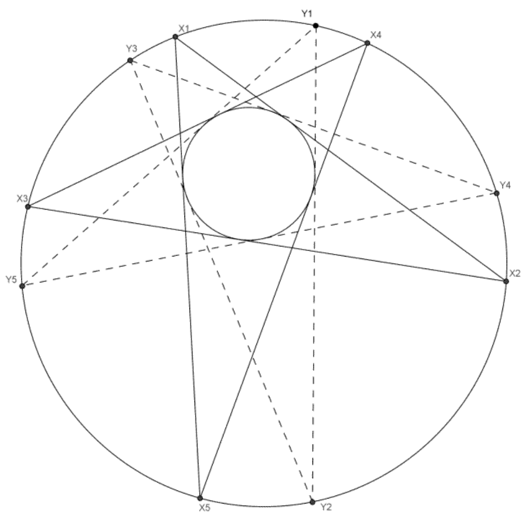
فرنوش هاشمی
دانش‌آموز ریاضی فیزیک
دبیرستان فرزانگان ۱ تهران

اثبات هندسی قضیهٔ پونسله در حالت $n = ۴$

قضیهٔ «پونسله» بیان می‌کند که اگر دو دایرهٔ $w_۱$ و $w_۲$ متداخل باشند و از نقطه‌ای روی دایرهٔ $w_۲$ مانند $A_۱$ بر دایرهٔ $w_۲$ خطی مماس رسم کنیم تا دایرهٔ $w_۲$ را در نقطهٔ $A_۲$ قطع کند و این عمل را تکرار کنیم و پس از انجام تعداد متناهی از این عمل (n مرتبه) به نقطهٔ $A_۱$ برگردیم آنگاه از هر نقطهٔ دیگری روی $w_۱$ نیز این عمل را شروع کنیم، پس از n مرتبه رسم مماس، به نقطهٔ اولیه برمی‌گردیم.(شکل ۱.۸)

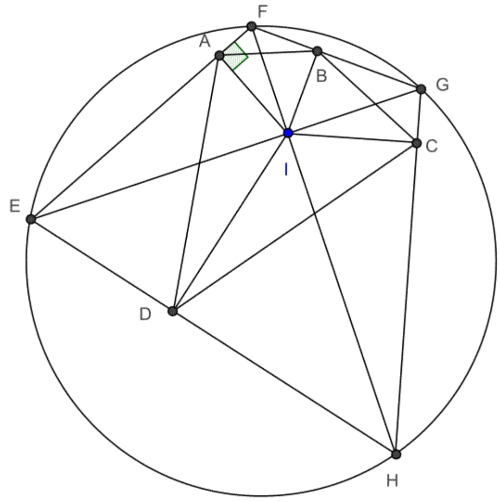


شکل ۱.۸. مسئله پونسله برای $n = ۵$

در این نوشتار ابتدا چند مسئلهٔ سادهٔ هندسی را طرح می‌کنیم و به اثبات آنها می‌پردازیم سپس قضیهٔ پونسله را در حالت $n = ۴$ نتیجه می‌گیریم. به این ترتیب که یک چهارضلعی محاطی و محیطی در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که بین شعاع دایرهٔ محیطی و محاطی آن و هم‌چنین فاصلهٔ مراکز این دو دایره، رابطه‌ای مستقل از شکل چهارضلعی وجود دارد و با داشتن این رابطه قضیه پونسله را برای $n = ۴$ اثبات می‌کنیم.

لم ۱. هر چهارضلعی که هم محیطی و هم محاطی باشد، قابل محاط شدن در یک چهارضلعی دیگر است، به صورتی که آن چهارضلعی محاطی است و قطرهای آن نیز بر هم عمود هستند و محل تقاطع اقطار آن همان I، مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی مفروض است.

اثبات. نیمساز خارجی زاویه‌های $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ را رسم می‌کنیم تا چهارضلعی $EFGH$ ایجاد شود.(شکل ۲.۸)



شکل ۲.۸

آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{r}\angle AFB + \angle AIB = ۱۸۰^\circ \\ \angle AIB + \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} = \angle AIB + \angle BAI + \angle IBA = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle AFB = \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲}$$

به طریق مشابه بدست می‌آید که $\angle DHC = \frac{\angle C}{۲} + \frac{\angle D}{۲}$ که نتیجه می‌دهد:

$$\angle AFB + \angle DHC = \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲} + \frac{\angle D}{۲} = \frac{\angle A + \angle B + \angle C + \angle D}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

پس $EFGH$ محاطی است.حال داریم :

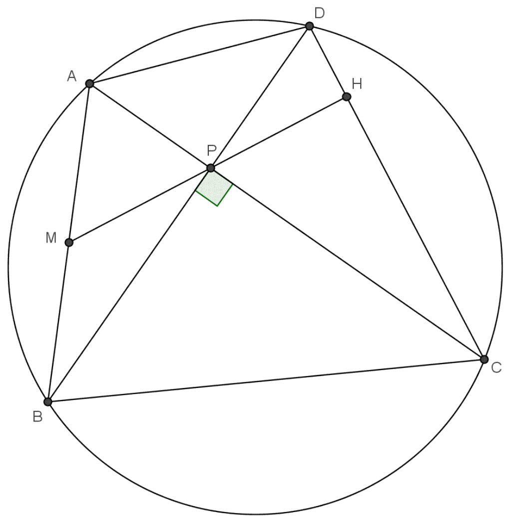
$$\left.\begin{array}{r}\angle FIB = \angle FAB = ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} \\ \angle HIC = \angle HDC = ۹۰^\circ - \frac{\angle D}{۲}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\angle FIB + \angle HIC + \angle BIC = \\ ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} + ۹۰^\circ - \frac{\angle D}{۲} - (۱۸۰^\circ - \angle IBC - \angle ICB) \\ = ۳۶۰^\circ - (\frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲} + \frac{\angle D}{۲}) \\ = ۱۸۰^\circ\end{array}\right.$$

در نتیجه F, I و H و به طریق مشابه E, I و G هم‌خط‌اند. پس I محل برخورد اقطار چهارضلعی است. هم‌چنین بدست می‌آید :

$$\left.\begin{array}{l}\angle FIB = \angle FAB = ۹۰^\circ - \frac{\angle A}{۲} \\ \angle BIG = \angle BCG = ۹۰^\circ - \frac{\angle C}{۲}\end{array}\right\} \Longrightarrow \angle FIB + \angle BIG = ۱۸۰^\circ - \frac{\angle A + \angle C}{۲} = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

پس اقطار این چهارضلعی بر هم عمودند. □

لم ۲. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی محاطی باشد و اقطارش در P بر هم عمود باشند. آنگاه میانهٔ مثلث APB ارتفاع مثلث CPD خواهد بود.(شکل ۳.۸)



شکل ۳.۸

اثبات. میانهٔ مثلث APB را رسم می‌کنیم و ثابت می‌کنیم این میانه بر DC عمود است.
چون PM میانهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه است ، می‌دانیم $PM = AM = BM$ ، که نتیجه می‌دهد مثلث PMB متساوی‌الساقین است. پس داریم :

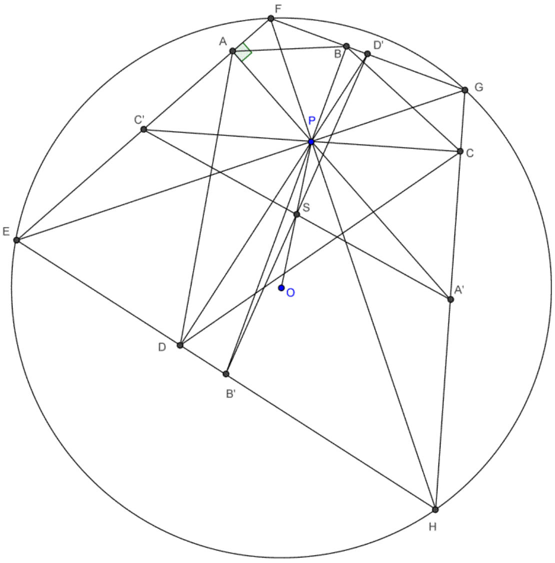
$$\angle DPH = \angle MPB = \angle ABP = \angle PCD \angle PCD$$

□

لم ۳. با توجه به شکل ۲.۸ اگر شعاع دایرهٔ محیطی $EFGH$ و $ABCD$ به ترتیب برابر x و R باشد و P محل برخورد اقطار $EFGH$ باشد آنگاه بدست می‌آید:

$$۴R^۲ = ۲x^۲ - OP^۲$$

اثبات. بنا بر لم ۲ اگر از P بر EH عمود کنیم ، امتداد آن از وسط FG می‌گذرد. به طریق مشابه امتداد همهٔ عمودهای وارد از نقطهٔ P بر اضلاع چهارضلعی از وسط ضلع‌های روبرو می‌گذرند. پس هشت‌ضلعی $ABCDA'B'C'D'$ محاطی خواهدبود.(اثبات به عهده خواننده)



شکل ۴.۸

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}D'F=D'G\\ A'P=A'H=A'G\end{array}\right\}\Rightarrow D'A'\parallel FH\\[2ex] \left.\begin{array}{r}D'F=D'G\\ C'P=C'E=C'F\end{array}\right\}\Rightarrow D'C'\parallel EG\\[2ex] FH\perp EG\end{array}\right\}\Rightarrow D'C'\perp D'A'$$

حال چون تمام زوایای $A'B'C'D'$ قائمه‌اند ، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع و مستطیل خواهد بود. S را محل تقاطع قطرهای این مستطیل در نظر می‌گیریم،پس S مرکز دایرهٔ محیطی $A'B'C'D'$ و در نتیجه $ABCD$ است.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}D'F=D'G\Rightarrow OD'\perp FG\Rightarrow OD'\parallel PB\\ \text{به طریق مشابه}\Rightarrow OB'\parallel PD\end{array}\right\}\Rightarrow OD'PB'\ \text{متوازی‌الاضلاع است}\\[2ex] SB'=SD'\end{array}\right\}\Rightarrow S\in OP, OS=SP$$

می‌دانیم در یک متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات طول اضلاع با مجموع مربعات طول قطرها برابر است. پس:

$$OP^{۲}+B'D'^{۲}=۲OB'^{۲}+۲OD'^{۲} \tag{۱.۸}$$

$$\left.\begin{array}{r} OD' = PB' \overset{(۸.۱)}{=} \dfrac{EH}{۲} \\ OB' = PD' = D'G \end{array}\right\} \Rightarrow OP^۲ + B'D'^۲ = ۲(GD'^۲ + CD'^۲) = ۲OG^۲ = ۲x^۲ \quad \left.\begin{array}{r} \\ \\ B'D' = ۲R \end{array}\right\} \Rightarrow ۴R^۲ = ۲x^۲ - OP^۲$$

□

لم ۴. در شکل ۲.۸ اگر شعاع دایرهٔ محیطی $EFGH$، x و شعاع دایره‌ی محاطی $ABCD$، r باشد، آنگاه :

$$r = \frac{x^۲ - OP^۲}{۲x}$$

اثبات. می‌دانیم که P همان I مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است و داریم: $\angle BGP = \angle BCP$

$$\left.\begin{array}{r} r = PN \Rightarrow r = PC.\sin\angle PCN \\ PC = PH.\sin\angle FHG \\ PH = HG.\sin\angle EGH \end{array}\right\} \Rightarrow r = HG.\sin\angle FGP.\sin\angle FHG.\sin\angle EGH$$

$$\left.\begin{array}{r} \sin\angle FGP.\sin\angle FHG = \dfrac{EF}{۲x}.\dfrac{FG}{۲x} \\ HG.\sin\angle EGH = PH \end{array}\right\} \Longrightarrow r = \frac{EF.FG}{۴x^۲}.PH$$

$$EF.FG = \frac{FP.EG}{\sin\angle EFG} \Rightarrow r = \frac{PH.PF.EG}{۴x^۲.\sin\angle EFG} = \frac{PH.PF}{۲x} = \frac{x^۲ - OP^۲}{۲x}$$

□

نتیجه ۵. با توجه به شکل ۴.۸ قبلاً ثابت کردیم S مرکز دایرهٔ محیطی شکل است و P مرکز دایرهٔ محاطی آن. پس فاصلهٔ مراکز دوایر محیطی و محاطی برابر SP خواهد بود و همچنین طبق اثبات لم ۳ می‌دانیم $OP = ۲SP$، پس اگر $SP = d$ باشد آنگاه:

$$r = \frac{x^۲ - (۲d)^۲}{۲x} = \frac{x^۲ - ۴d^۲}{۲x}$$

$$۴R^۲ = ۲x^۲ - ۲d^۲ \Rightarrow ۴R^۲ = ۲x^۲ - ۴d^۲ \Rightarrow ۲R^۲ = x^۲ - ۲d^۲ \Rightarrow R = \sqrt{\frac{x^۲ - ۲d^۲}{۲}}$$

$$۲R^۲ = x^۲ - ۲d^۲ \Rightarrow x^۲ = ۲R^۲ + ۲d^۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲R^۲ + ۲d^۲}$$

$$r = \frac{x^۲ - ۴d^۲}{۲x} \Rightarrow x^۲ - ۴d^۲ - ۲xr = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲xr - ۴d^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲R^۲ + ۲d^۲ - ۲r\sqrt{۲R^۲ + ۲d^۲} - ۴d^۲ = ۰ \Rightarrow R^۲ - d^۲ = r\sqrt{۲R^۲ + ۲d^۲}$$

$$\Rightarrow R^۴ + d^۴ - ۲R^۲d^۲ = ۲R^۲r^۲ + ۲d^۲r^۲ \Rightarrow R^۴ + d^۴ - ۲R^۲d^۲ - ۲R^۲r^۲ - ۲d^۲r^۲ = ۰$$

پس برای دو دایرهٔ محاطی و محیطیِ یک چهارضلعی با شعاع‌های r و R به طوری که فاصله مرکزهایشان d باشد رابطهٔ زیر برقرار است :

$$R^۴ + d^۴ - ۲R^۲d^۲ - ۲R^۲r^۲ - ۲d^۲r^۲ = ۰$$

اثبات. حال می‌خواهیم قضیهٔ پونسله را برای $n = ۴$ نتیجه بگیریم. فرض کنید برای دو دایره این رابطه طولی برای $(R, r_۱, d)$ وجود دارد و با شروع از نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ بزرگتر و رسم چهار مماس متوالی بر دایرهٔ کوچکتر، به نقطهٔ اولیه نرسیم و به نقطه‌ای قبل/بعد از آن برسیم. حال مرکز دایرهٔ کوچکتر را تغییر ندهید ولی شعاع آن را کوچک و کوچکتر/بزرگ و بزرگتر کنید و مماس‌ها را همچنان رسم شده فرض کنید، بالاخره در شعاعی مثل $r_۲ \neq r_۱$ چهارمین مماس به نقطهٔ اولیه می‌رسد. پس بنابر رابطهٔ طولی بدست‌آمده این رابطه برای $(R, r_۲, d)$ هم برقرار است. ولی در چندجمله‌ای فوق r فقط با توان دوم و علامت منفی ظاهر شده است، پس نمی‌تواند به ازای $r_۱$ و $r_۲$ برابر با صفر باشد. بنابراین تناقض حاصل نشان می‌دهد که فرض اولیه اشتباه بوده و در همان ابتدا پس از چهار مماس به نقطهٔ اولیه می‌رسیم. □