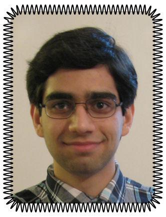
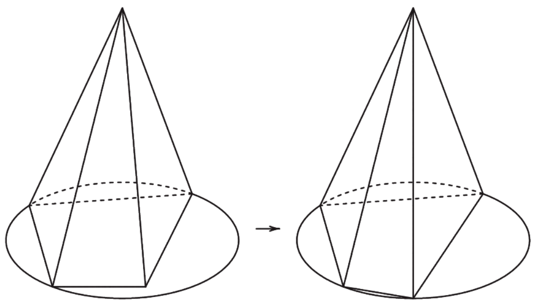


امیرعلی معین‌فر
دانشجوی کارشناسی
ریاضی و مهندسی نرم‌افزار
دانشگاه صنعتی شریف

چندوجهی‌های غیرمحاطی

۱.۸ قضیهٔ اصلی

لزومی ندارد که رئوس یک چندوجهی تصادفی محدب بر روی یک کره قرار داشته باشند. برای مثال در هرم شکل ۱، اگر قاعده یک چهارضلعی محاطی نباشد، خود هرم نیز داخل کره‌ای محاط نخواهد شد. ولی به سادگی می‌توان قاعده را به گونه‌ای تغییر داد که چهارضلعی محاطی شده و در نتیجه هرم یک چندوجهی محاطی شود. ممکن است فکر کنید که هر چندوجهی محدب را می‌توان به گونه‌ای تغییر داد که در یک کره محاط شود.



شکل ۱. تغییر شکل یک هرم برای محاط شدن در یک کره

ولی این کار همیشه امکان‌پذیر نیست. در سال ۱۹۲۸ اشتاینیتز[۱] قضیهٔ زیر را ثابت کرد.

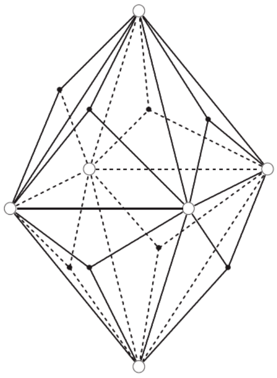
قضیه ۱. فرض کنید P یک چندوجهی محدب با رئوس سیاه و سفید باشد به گونه‌ای که رئوس سیاهش بیشتر از رئوس سفیدش بوده و هیچ دو رأس سیاه آن مجاور نباشند. آنگاه P نمی‌تواند درون یک کره محاط شود.

شرط قضیه کاملاً ترکیبیاتی است، پس هیچ تغییر شکلی نمی‌تواند P را محاطی کند. بنابراین P یک «چندوجهی غیرمحاطی» است.

این مقاله ترجمه‌ای از فصل بیست و یکم کتاب Mathematical Omnibus نوشتهٔ D. Fuchs و S. Tabachnikov است که توسط انتشارات American Mathematical Society به چاپ رسیده است.

[۱] E. Steinitz

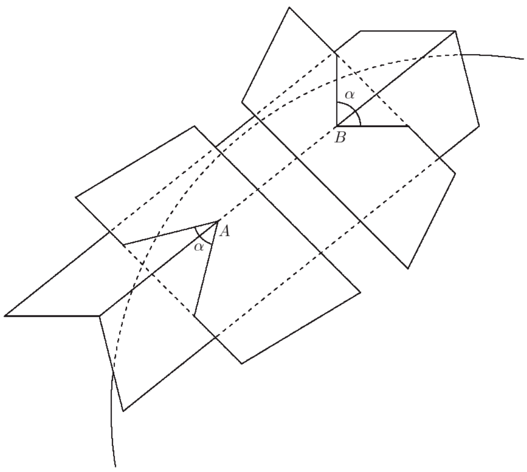
اینجا مثالی از یک چندوجهی داریم که در شرایط قضیه صدق می‌کند. یک هشت‌وجهی در نظر گرفته و رئوس آن را سفید کنید. به هر وجه، یک چهاروجهی (با ارتفاع کم تا محدب بودن را نقض نکند) متصل کنید و رئوس جدید را سیاه کنید. اکنون ۶ رأس سفید و ۸ رأس سیاه داریم که هیچ دو رأس سیاهی در مجاورت یکدیگر نیستند، شکل ۲ را ببینید. به همین صورت می‌توان این کار را به جای هشت‌وجهی، با بیست‌وجهی انجام داد.



شکل ۲. یک چندوجهی غیر محاطی

در یک نگاه، این موضوع متناقض به نظر می‌رسد. یک هشت‌وجهی منتظم به خودی خود محاطی است. پس می‌توان اندازهٔ چهاروجهی‌های متصل به وجوه آن را به گونه‌ای انتخاب کرد که رئوس جدید نیز بر روی کره قرار گیرند و در نهایت یک چندوجهی محاطی به دست آورد. ایراد کار این است که چندوجهی جدید محدب نیست!

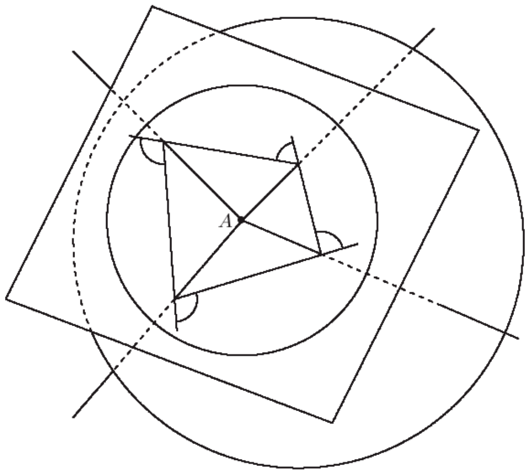
اثبات. کرهٔ S همراه با یک گوه (شکل به دست آمده توسط دو صفحه) که لبهٔ آن S را در A و B قطع می‌کند، در نظر بگیرید. تلاقی دو صفحه که گوه را تشکیل می‌دهند با کره، دو دایره است. فرض کنید زاویهٔ بین این دو دایره در نقطهٔ A برابر α باشد. ما α را زاویهٔ دوسطحی نسبت به کرهٔ S، یا برای اختصار زاویهٔ نسبی دوسطحی می‌نامیم. ممکن است کسی B را برای این کار انتخاب کند که در آن صورت نیز زاویهٔ یکسانی پدید می‌آید، شکل۳ را ببینید. هنگامی که زاویهٔ نسبی دوسطحی α است، زاویهٔ خارجی نسبی دوسطحی برابر $\pi - \alpha$ خواهد بود.



شکل ۳. زاویهٔ نسبی دوسطحی

اکنون یک چندوجهی مخروطی و محدب با رأس A در نظر بگیرید که A روی کرهٔ S قرار دارد و اضلاع آن کره را قطع

می‌کنند. در این‌صورت مجموع زاویه‌های خارجی نسبی دوسطحی مخروط برابر با 2π است. در واقع می‌توان از صفحهٔ مماس بر S در نقطهٔ A استفاده کرد و زوایای نسبی دوسطحی را به این صورت محاسبه کرد. این صفحه را به صورت موازی خودش داخل کره جابه‌جا کنید تا تمام اضلاع مخروط را قطع کند. محل تقاطع یک چندضلعی محدب است که زوایای آن برابر زوایای نسبی دوسطحی است (چرا؟). از طرفی جمع زوایای خارجی هر چندضلعی محدب برابر 2π است و این ادعایمان را ثابت می‌کند. شکل ۴ را ببینید.



شکل ۴. اثبات قضیهٔ ۱

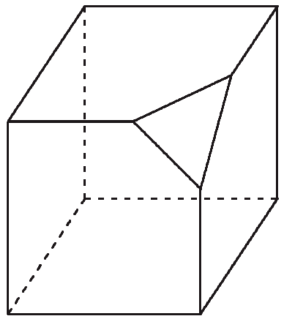
پس از این مقدمات، چندوجهی محاطی P که در شرایط مساله صدق می‌کند را در نظر بگیرید. برای هر رأس، مجموع زوایای نسبی خارجی 2π است. فرض کنید Σ مجموع این زوایا با در نظر گرفتن علامت مثبت برای نقاط سفید و علامت منفی برای نقاط سیاه باشد. از یک طرف چون تعداد نقاط سیاه بیشتر است، پس $\Sigma < 0$.
از طرف دیگر دو نوع ضلع وجود دارد: اضلاع با دو رأس سفید و اضلاع با یک رأس سیاه و یک رأس سفید. زوایای خارجی نسبی دوسطحی در دو سر اضلاع برابر هستند. برای یک ضلع سفید-سفید، دو سهم در Σ مثبت‌اند و برای یک ضلع سیاه-سفید این دو سهم یکدیگر را خنثی می‌کنند. پس $\Sigma \geq 0$ که این یک تناقض است. □

۲.۸ مثالی دیگر

قضیهٔ ۱ یک شرط کافی برای محاطی نبودن یک چندوجهی است، ولی به هیچ وجه لازم نیست. مثال نمایش داده شده در شکل ۵ را در نظر بگیرید. مکعب لب‌پریدهٔ P در شرایط قضیهٔ ۱ صدق نمی‌کند، ولی بیایید ثابت کنیم P نیز محاطی نیست.
یک چندوجهی مخروطی با سه سطح و رأس A که ضلع‌هایش دایره را قطع می‌کنند در نظر بگیرید.

لم ۲. مجموع زوایای نسبی دوسطحی با توجه به این که A بیرون، روی سطح و یا درون S باشد به ترتیب کمتر، مساوی و یا بیشتر از π است.

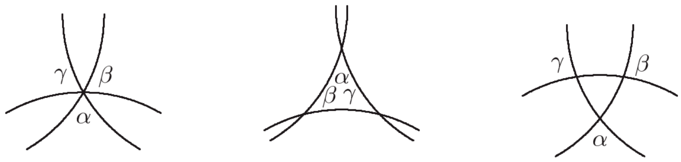
اثبات. وجوه مخروط، کره را در سه دایره قطع می‌کنند و زوایای بین این دوایر، زوایای نسبی دوسطحی هستند. یک نقطه



شکل ۵. مکعب لب‌پریده

از کره که روی دایره‌ها قرار ندارند را در نظر گرفته و S را از این نقطه تصویر کنج‌نگاری[۲] کنید. سه دایره روی صفحه به دست می‌آوریم و زوایای بین این دوایر روی صفحه برابر زوایای روی کره است (دلیل این موضوع این است که تصویر کنج‌نگاری، زوایا را حفظ کرده و دایره را به دایره می‌برد، تمرین ۲ در انتهای مقاله را ببینید).

اگر A روی کرهٔ S باشد، سه دایره در یک نقطه همرس‌اند و مجموع زوایا برابر π است، شکل ۶ را ببینید. در غیر این صورت بر اساس این که A خارج یا داخل دایره باشد دو حالت داریم که در شکل ۶ آمده است. در حالت اول مجموع زوایا کمتر از π و در حالت دوم این مجموع بیشتر از π خواهد بود. □



شکل ۶. وضعیت سه دایره نسبت به هم

اکنون به مکعب لب پریدهٔ P بر می‌گردیم و فرض می‌کنیم که درون کرهٔ S محاط شده است. مکعب اولیه که P از بریدن لبهٔ آن به دست آمده را Q می‌نامیم. Q را به گونه‌ای سیاه و سفید می‌کنیم که دو سر هر ضلع رنگ‌های متفاوتی داشته‌باشند. رأس بریده شده را A می‌نامیم و فرض می‌کنیم که سفید است.
به هر ضلع Q زاویهٔ خارجی نسبی دوسطحی متناظر با آن ضلع در P را نسبت می‌دهیم. برای هر رأس Q به جز A، مجموع این زوایا 2π است. رأس A به وضوح خارج کره قرار دارد، پس با توجه به لم ۱ مجموع زوایای نسبی دوسطحی A کمتر از π است. پس مجموع زوایای خارجی نسبی دوسطحی در این نقطه بیشتر از 2π است.
اکنون مانند اثبات قضیهٔ ۱، زوایای خارجی نسبی دوسطحی را با علامت مثبت و منفی روی تک تک رئوس Q جمع می‌زنیم. از یک طرف مقدار صفر به دست می‌آید و از طرف دیگر مجموع مثبت است: سه رأس Q که شامل ۳ سفید و ۴ سیاه است، در مجموع سهمی به اندازهٔ -2π دارد و سهم A مقداری بیش از 2π است که تناقض است. □

در پایان، اشاره می‌کنیم که حالت سومی نیز برای وضعیت یک چندوجهی و یک کره نسبت به هم وجود دارد: وقتی که تمام اضلاع مماس بر کره هستند. کوبه[۳] در سال ۱۹۳۶ ثابت کرد که این چندوجهی‌ها تمام صورت‌های ترکیبیاتی

---

[۲] اگر S یک کره و P نقطه‌ای روی آن باشد، تصویر «کنج‌نگاری» کره از P به این صورت تعریف می‌شود: فرض کنید H صفحهٔ مماس بر کره در نقطهٔ مقابل قطری P باشد، تصویر کنج‌نگاری نقطهٔ دلخواه X روی کره، نقطهٔ حاصل از تقاطع خط واصل P و X با صفحهٔ H است. بنابراین این تبدیل در هر نقطهٔ دلخواه روی کره غیر از P تعریف شده و یک تناظر بین این نقاط ونقاط صفحهٔ H برقرار می‌کند.

[۳] P. Koebe

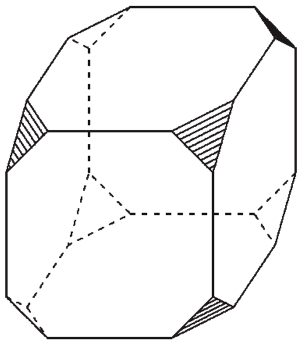
چندوجهی‌های محدب را می‌توانند داشته باشد. چندسال بعد شرام [۴] در سال ۱۹۹۲ در مقاله‌ای با عنوان «چگونه یک تخم مرغ را زندانی کنیم» ثابت کرد که در قضیهٔ کوبه، کره را می‌توان با اشکال تخم مرغی[۵] دلخواه تعویض کرد.

۳.۸ تمارین

۱. با یک محاسبهٔ صریح نشان دهید که اگر چهاروجهی‌هایی را به وجوه یک هشت وجهی متصل کنیم به طوری که رئوس جدید روی کرهٔ محیط بر هشت‌وجهی قرار گیرند، چندوجهی حاصل محدب نخواهد بود. شکل ۲ را ببینید.

۲. ثابت کنید تصویر کنج‌نگاری از کره به صفحه، دوایر را به دوایر برده و زاویهٔ بین آنها را حفظ می‌کند.

۳. * فرض کنید P یک چندوجهی باشد که وجوه آن سیاه و سفید شده‌اند به طوری که وجوه سیاه بیشتر بوده و هیچ دو وجه سیاه همسایه نیستند. ثابت کنید P بر هیچ کره‌ای محیط نیست (یعنی کره‌ای وجود ندارد که تمام وجوه P بر آن مماس باشند).
یک مثال ساده از چنین چندوجهی، مکعبی است که تمام رئوس آن بریده شده است، شکل ۷ را ببینید.



شکل ۷. یک چندوجهی غیر محیطی

۴. یک چندوجهی را در نظر بگیرید که هر رأس آن با تعداد یکسانی وجه مجاور است. ثابت کنید که اگر رئوس با دو رنگ سیاه و سفید به گونه‌ای رنگ شوند که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نیستند، آنگاه تعداد رئوس سیاه و سفید برابر است.

۵. ثابت کنید رئوس یک چندوجهی را می‌توان با دو رنگ سیاه و سفید به گونه‌ای رنگ‌کرد که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند، اگر و تنها اگر هر وجه تعداد زوجی ضلع داشته باشد.
راهنمایی. یک رأس را رنگ کنید، سپس رأس بعدی را و الی آخر. این عمل یا نتیجهٔ مطلوب را می‌دهد و یا یک مسیر بسته به طول فرد از اضلاع چندوجهی وجود دارد.

[۴] O. Schramm
[۵] ovaloid