

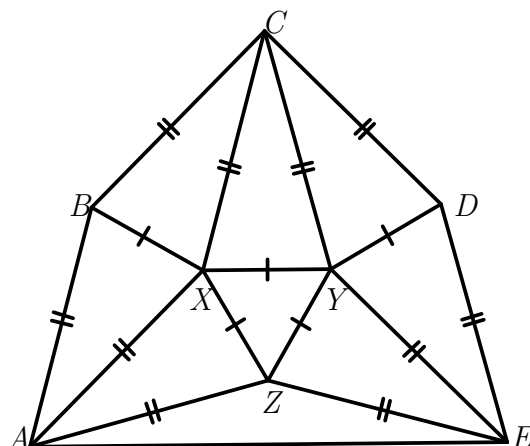


به نام خدا  
نهمین المپیاد هندسه ایران  
سطح مقدماتی

۲۲ مهر ۱۴۰۱  
زمان: ۲۴۰ دقیقه

مسائل این آزمون باید تا زمان انتشار آن‌ها در وبسایت رسمی المپیاد هندسه ایران محرمانه بمانند. آدرس وبسایت: [igo-official.com](http://igo-official.com)

مسئله ۱. در شکل زیر، زوایای پنج ضلعی  $ABCDE$  را بیابید.



مسئله ۲. دوزنقه متساوی الساقین  $ABCD$  با قاعده‌های  $DC, AB$  مفروض است. نقاط  $F, E$  روی  $DA, CB$  طوری قرار دارند که  $DF = EB$ . نقاط  $M, N$  روی  $EF$  طوری قرار دارند که  $FM = EN$ . اگر  $K, L$  پای ارتفاع‌های وارد از  $M, N$  بر  $AB, CD$  باشند ثابت کنید  $EKFL$  متوازی‌الاضلاع است.

مسئله ۳.  $ABCDE$  یک پنج‌ضلعی محدب است به طوری که  $AB = BC = CD$  و  $\angle BDE = \angle EAC = 30^\circ$ . تمام مقادیر زاویه  $\angle BEC$  را بیابید.

مسئله ۴. در مثلث  $ABC$ ،  $AD$  نیمساز است. دایره محاطی داخلی مثلث‌های  $ABC$  و  $ACD$  به یکدیگر مماس خارجند. ثابت کنید  $\angle ABC > 120^\circ$ .  
(دقت کنید که دایره محاطی یک مثلث، دایره ای است که در درون مثلث قرار دارد و به سه ضلع آن مماس است)

مسئله ۵. الف) آیا ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه وجود دارند که هر دوتایی از آن‌ها راسی مشترک باشند و هر نقطه‌ای در صفحه حداکثر روی مرز دو تا از آن‌ها قرار داشته باشد؟  
ب) آیا ۴ مربع در صفحه وجود دارند که هر دوتایی از آن‌ها راسی مشترک باشند و هر نقطه‌ای در صفحه حداکثر روی مرز دو تا از آن‌ها قرار داشته باشند؟  
(دقت کنید در هر دو بخش، فرضی در مورد نقاط درونی چندضلعی‌ها نشده است)

بارم هر سؤال ۸ نمره است.  
موفق باشید.

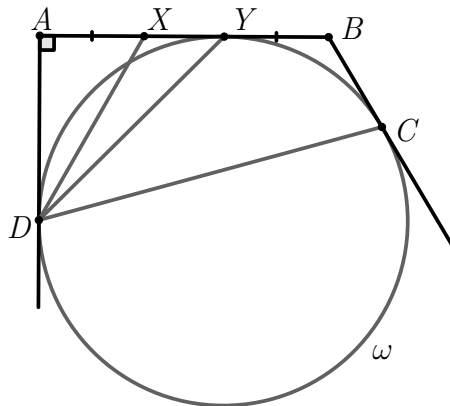


به نام خدا  
 نهمین المپیاد هندسه ایران  
 سطح متوسط

۲۲ مهر ۱۴۰۱  
 زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسائل این آزمون باید تا زمان انتشار آن‌ها در وبسایت رسمی المپیاد هندسه ایران محرمانه بمانند. آدرس وبسایت: [igo-official.com](http://igo-official.com)

مسئله ۱. در شکل زیر  $AX = BY$  است. ثابت کنید  $\angle XDA = \angle CDY$ .



مسئله ۲.

دو دایره  $\omega_1$  و  $\omega_2$  با شعاع برابر در  $E, X$  متقاطعند. نقاط دلخواه  $D$  و  $C$  به ترتیب روی  $\omega_1$  و  $\omega_2$  انتخاب شده‌اند. از  $E$  موازی  $XD$  و  $XC$  رسم میکنیم تا  $\omega_1$  و  $\omega_2$  را به ترتیب در  $A$  و  $B$  قطع کنند. اگر  $CD$ ، دو دایره را برای بار دوم در  $P, Q$  قطع کند، ثابت کنید  $ABPQ$  محاطی است.

مسئله ۳. نقطه  $O$ ، مرکز دایره محیطی از  $ABC$  است. روی ضلع  $AC$  و  $BC$ ، نقاط  $M$  و  $N$  به ترتیب انتخاب شده‌اند. نقاط  $P$  و  $Q$  در همان سمتی از  $MN$  که  $C$  قرار دارند، هستند، به طوری که  $\triangle CMN \sim \triangle PAN \sim \triangle QBM$  (به همین ترتیب). ثابت کنید  $OP = OQ$ .

مسئله ۴. دو چندضلعی ساده  $P$  و  $Q$  را سازگار می‌گوییم، اگر عدد طبیعی  $k$  موجود باشد که هر یک از  $P, Q$  را بتوان به  $k$  چندضلعی هم‌نهشت متشابه با دیگری افزایش کرد. ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح زوج  $4 \leq m, n$ ، دو چندضلعی ساده سازگار به ترتیب با  $m, n$  ضلع وجود دارند. (منظور از یک چندضلعی ساده چندضلعی است که خودش را قطع نمی‌کند.)

مسئله ۵.  $ABCD$  چهارضلعی محاطی با دایره محیطی  $\omega$  و مرکز  $O$  است. تقاطع قطرهای  $AC, BD$  را  $P$  مینامیم.  $Q$  نقطه‌ای روی  $OP$  است.  $E, F$  تصویر  $Q$  روی  $AD, BC$  هستند.  $M, N$  روی دایره محیطی  $QEF$  طوری قرار دارند که  $QM \parallel AC$  و  $QN \parallel BD$ . ثابت کنید خطوط  $ME, NF$  روی عمود منصف  $CD$  هم‌رسند.

بارم هر سؤال ۸ نمره است.  
 موفق باشید.



به نام خدا  
نهمین المپیاد هندسه ایران  
سطح پیشرفته  
۲۲ مهر ۱۴۰۱  
زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسائل این آزمون باید تا زمان انتشار آن‌ها در وبسایت رسمی المپیاد هندسه ایران محرمانه بمانند. آدرس وبسایت: [igo-official.com](http://igo-official.com)

مسئله ۱. چهار نقطه  $A, B, C$  و  $D$  روی دایره  $\omega$  قرار دارند به طوری که  $AB = BC = CD$ . خط مماس به  $\omega$  در  $C$ ، مماس در  $A$  به  $\omega$  و  $AD$  را به ترتیب در  $K$  و  $L$  قطع می‌کند. دایره  $\omega$  و دایره محیطی مثلث  $KLA$  یکدیگر را برای بار دوم در  $M$  قطع میکنند. ثابت کنید  $MA = ML$ .

مسئله ۲. در مثلث حاده  $ABC$  ( $AB \neq AC$ )، نقطه  $D$  روی  $BC$  به گونه ای است که  $DA$  بر دایره محیطی مثلث مماس است. نقاط  $E$  و  $F$  به ترتیب مراکز دایره محیطی  $ABD$  و  $ACD$  هستند. نقطه  $M$  وسط  $EF$  است. ثابت کنید خط مماس بر دایره  $AMD$  در نقطه  $D$ ، بر دایره محیطی مثلث  $ABC$  نیز مماس است.

مسئله ۳. در مثلث  $ABC$  ( $\angle A \neq 90^\circ$ )، مرکز دایره محیطی و پای ارتفاع نظیر  $A$  به ترتیب  $H, O$  هستند.  $M, N$  وسط  $BC, AH$  هستند،  $D$  تقاطع  $AO$  و  $BC$  است و  $H'$  قرینه  $H$  به  $M$  است. دایره  $OH'D$  دایره  $BOC$  را در  $E$  قطع می‌کند، ثابت کنید  $AE, NO$  روی دایره  $BOC$  هم‌رسند.

مسئله ۴.  $ABCD$  ذوزنقه است به طوری که  $AB \parallel CD$ . قطرهای آن در  $P$  متقاطعند. خطی که از  $P$  می‌گذرد و موازی  $AB$  است،  $AD$  و  $BC$  را به ترتیب در  $Q$  و  $R$  قطع میکند. نیمسازهای خارجی زوایای  $DBA, DCA$  در  $X$  متقاطعند. فرض کنید  $S$  پای ارتفاع وارد از  $X$  بر  $BC$  باشد. ثابت کنید اگر چهارضلعی‌های  $ABPQ, CDQP$  محیطی باشند آنگاه  $PR = PS$ .

مسئله ۵. در مثلث حاده  $ABC$  خطی از مرکز دایره محیطی می‌گذرد و کمان‌های کوچکتر  $AB, AC$  را در  $R, S$  و اضلاع  $AB, AC$  را در  $F, E$  قطع میکند که  $BFEC$  محاطی باشد.  $K, L$  به ترتیب قرینه‌های  $R, S$  به  $C, B$  هستند.  $P, Q$  روی  $BS, CR$  به شکلی هستند که  $KP, LQ$  به  $BC$  عمود هستند. ثابت کنید دایره به مرکز  $P$  و شعاع  $PK$  به  $RCE$  مماس است اگر و تنها اگر دایره به مرکز  $Q$  و شعاع  $QL$  به  $BFS$  مماس باشد.

بارم هر سؤال ۸ نمره است.  
موفق باشید.